

SEGNALI E SISTEMI
10 luglio 2026
secondo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Siano dati i segnali a tempo continuo

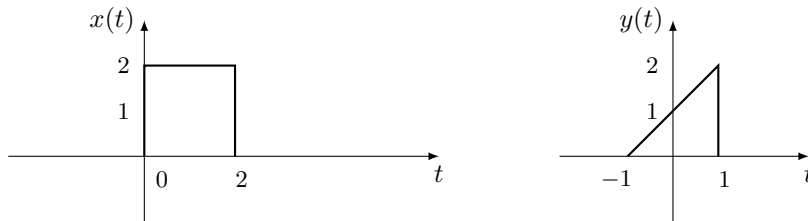
$$x(t) = 2 \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

$$y(t) = (t+1) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$

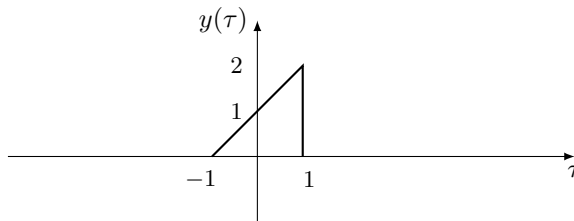
1. Disegnare i segnali $x(t)$ e $y(t)$ [1 punto].
2. Calcolare la loro convoluzione $z(t) = x * y(t)$ [4 punti].
3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando opportunamente la risposta [2 punti]:
 - $w_1(t) = x(t+4) * y(t-4) = z(t)$.
 - $w_2(t) = x(t+4) * y(t+4) = z(t+4)$.

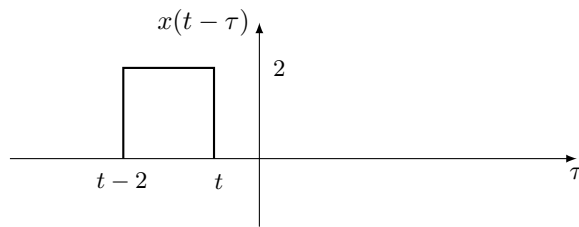
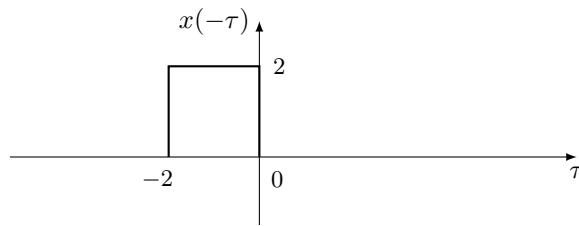
Soluzione.

1. I segnali sono mostrati in figura



2. Per calcolare la convoluzione scriviamo disegniamo i segnali $y(\tau)$, $x(\tau)$, $x(-\tau)$ e $x(t-\tau)$ al variare di t :

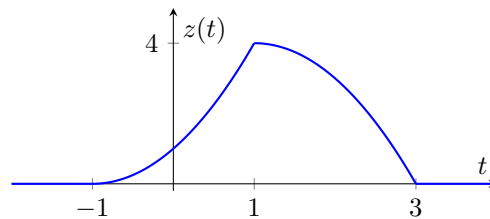




Si ha che:

- Per $t < -1$ e $t \geq 3$, si ha $z(t) = x(t) * y(t) = 0$.
- Per $-1 \leq t \leq 1$, si ha $z(t) = \int_{-1}^t 2(\tau + 1)d\tau = t^2 + 2t + 1$
- Per $1 < t \leq 3$, si ha $z(t) = \int_{t-2}^1 2(\tau + 1)d\tau = -t^2 + 2t + 3$

disegnato in figura:



3. La prima affermazione è vera perchè,

$$z_1(t) = x(t+4) * y(t) = z(t+4)$$

$$w_1(t) = x(t+4) * y(t-4) = z_1(t-4) = z(t+4-4) = z(t)$$

La seconda non è vera perchè

$$z_1(t) = x(t+4) * y(t) = z(t+4)$$

$$w_2(t) = x(t+4) * y(t+4) = z_1(t+4) = z(t+4+4) = z(t+8) .$$

Esercizio 2 [punti 7]

Il segnale

$$x(t) = t \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$$

viene filtrato da un filtro con risposta impulsiva

$$h(t) = \cos(\pi t) .$$

1. Identificare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ [4 punti].
2. Dire se il filtro è BIBO stabile, giustificando la risposta [1 punto].
3. Identificare il segnale $y(t)$ in uscita dal filtro [2 punti].

Soluzione.

1. Per la trasformata di Fourier possiamo scrivere la sua derivata nella forma

$$x'(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) - 2\delta(t-2)$$

di cui conosciamo la trasformata di Fourier di $X'(j\omega)$, ovvero

$$X'(j\omega) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega}$$

dove abbiamo utilizzato la regole di scala (con fattore $a = 2$) e la regola di traslazione (con $t_0 = 1$ e $t_0 = 2$). Dalla regola di integrazione si ha

$$X(j\omega) = \left[2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega} \right] \frac{1}{j\omega}$$

(il termine impulsivo è nullo poichè la media del segnale $x(t)$ è nulla). $X(j\omega)$ si può anche riarrangiare e ottenere:

$$X(j\omega) = \frac{e^{-j2\omega}(1 + 2j\omega) - 1}{\omega^2}$$

2. Il filtro è ovviamente non BIBO stabile in quanto $|\cos(\pi t)|$ non è assolutamente integrabile.
3. Sfruttando la regola di filtraggio reale di una sinusoide, in cui la risposta impulsiva del filtro è il segnale $x(t)$ e la sinusoide è il segnale $h(t)$, otteniamo

$$y(t) = |X(j\pi)| \cos(\pi t + \arg(X(j\pi)))$$

in cui

$$X(j\pi) = \frac{e^{-j2\pi}(1 + 2j\pi) - 1}{\pi^2} = j\frac{2}{\pi}$$

e pertanto

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} \sin(\pi t) .$$

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema discreto descritto dall'equazione

$$y(n) - y(n-2) = x(n) .$$

1. Identificare la funzione di trasferimento nel dominio zeta [1 punto].
2. Dire se il sistema è BIBO stabile giustificando opportunamente la risposta [1 punto].
3. Trovare il segnale di uscita, se il segnale d'ingresso è $x(n) = \delta(n) + \delta(n-1)$ e condizioni iniziali $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 0$ [4 punti].
4. Trovare, se esiste, un segnale di ingresso limitato che renda l'uscita non limitata [1 punto].

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si ricava dall'equazione alle differenze per ispezione:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}$$

2. I poli di $H(z)$ sono $z_1 = 1$ e $z_2 = -1$, entrambi sul cerchio di raggio unitario, e pertanto il sistema non è BIBO stabile.
3. Per trovare l'uscita del sistema osserviamo che

$$X(z) = 1 + z^{-1}$$

Per risolvere il sistema, identifichiamo il sistema tramite trasformata zeta unilatera, ed otteniamo (per trasformata)

$$Y(z) - (Y(z)z^{-2} + y(-1)z^{-1} + y(-2)) = X(z)$$

da cui

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - z^{-2}} + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-2}}$$

in cui abbiamo sfruttato le condizioni iniziali. Sostituendo $X(z)$ si ha:

$$Y(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})} = \frac{3/2}{1 - z^{-1}} - \frac{1/2}{1 + z^{-1}}$$

da cui

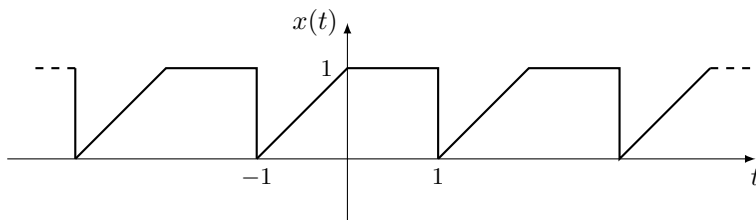
$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{3}{2} 1^n u(n) - \frac{1}{2} (-1)^n u(n) \\ &= \frac{3}{2} u(n) - \frac{1}{2} (-1)^n u(n) \end{aligned}$$

dove $u(n) = 1_0(n)$ è il gradino discreto.

4. In questo caso basta stimolare uno dei poli al limite dell'instabilità, ovvero ± 1 . Per cui sia il segnale $x(n) = u(n)$ che il segnale $x(n) = (-1)^n u(n)$ sono segnali appropriati.

Esercizio 4 [punti 3]

Calcolare i coefficienti della serie di Fourier per il segnale periodico illustrato in figura



Soluzione. Conviene procedere tramite regola di derivazione in quanto

$$y(t) = x'(t) = \underbrace{\text{rep}_2 \text{rect}(t + \frac{1}{2})}_{\text{onda quadra } d = \frac{1}{2} \text{ traslata}} - \underbrace{\text{rep}_2 \delta(t - 1)}_{\text{comb traslato}}$$

ha coefficienti della serie di Fourier

$$Y_k = \frac{1}{2} \text{sinc}(\frac{k}{2}) e^{jk\omega_0 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{1}{T_p} e^{-jk\omega_0 \cdot 1}$$

in cui $T_p = 2$ e $\omega_0 = \pi$, e pertanto

$$Y_k = \frac{1}{2} \text{sinc}(\frac{k}{2}) j^k - \frac{1}{2} (-1)^k$$

Si noti come, correttamente, $Y_k = 0$. Dalla relazione $Y_k = jk\omega_0 X_k = jk\pi X_k$, otteniamo quindi

$$X_k = \begin{cases} \frac{\text{sinc}(k/2) \cdot j^k - (-1)^k}{jk2\pi} & , k \neq 0 \\ \frac{3}{4} & , k = 0 \end{cases}$$

dove il valore $X_0 = m_x$ per $k = 0$ è stato trovato valutando il valor medio del segnale originale dal suo grafico.

Esercizio 5 [punti 3]

Dato il seguente sistema a tempo discreto

$$y(n) = x(n+3) + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k) \cdot 2^{n-k}$$

dire se è lineare [1 punto], tempo-invariante [1 punto], BIBO stabile [1 punto].
Giustificare le risposte.

Soluzione. Il sistema si può scrivere come

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \cdot \left(2^{n-k} \cdot u(n-k-1) + \delta(n-k+3) \right)$$

dove $u(n) = 1_0(n)$ è il gradino discreto. Perciò è una convoluzione tra il segnale $x(n)$ e la risposta impulsiva

$$h(n) = 2^n u(n-1) + \delta(n+3)$$

ed è quindi lineare e tempo-invariante; essendo $h(n)$ non assolutamente sommabile (diverge per $n \rightarrow +\infty$), il sistema non è BIBO stabile.

Esercizio 6 [punti 3]

Dire quale tra i seguenti codici MatLab consente di calcolare e plottare correttamente il segnale $z(t) = x(t) * y(t)$, sapendo che i vettori x e y contengono i valori dei rispettivi segnali campionati nell'intervallo $[0 - 300]$ *min* con passo T , ovvero il loro asse temporale è $t = [0 : T : 300]$. Motivare opportunamente la risposta.

1. $z = \text{conv}(x, y);$
 $tz = 2 * t(1) : T : 2 * t(\text{end});$
 $\text{plot}(tz, z);$
2. $z = T * \text{conv}(x, y);$
 $tz = t;$
 $\text{plot}(tz, z);$
3. $z = 1/T * \text{conv}(x, y);$
 $tz = t;$
 $\text{plot}(tz, z);$
4. $X = T * \text{fft}(x);$
 $Y = T * \text{fft}(y);$
 $Z = X .* Y;$
 $z = 1/T * \text{ifft}(Z);$
 $tz = t;$
 $\text{plot}(tz, z);$

Soluzione. La risposta corretta è la 4. Nella 1 manca la moltiplicazione per T nel calcolo della convoluzione; nella 2 è errato l'asse dei tempi (si ricordi che la function *conv* applicata a due vettori di lunghezza N restituisce un vettore di lunghezza $2N + 1$); nella 3 è sbagliato l'asse dei tempi (come nella precedente) e la function *conv* è erroneamente premoltiplicata per $1/T$. La 4 invece esegue correttamente il calcolo della convoluzione passando per il calcolo delle trasformate di Fourier dei due segnali, sfruttando il teorema di convoluzione, ed antitrasformando. Il vettore z così ottenuto è riferito allo stesso asse dei tempi dei segnali x e y .