

MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

Terzo Compitino

23 giugno 2026

1. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\} \quad W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}$$

(a) Si trovino basi per i sottospazi di $\mathbb{R}^4$: W_1 , W_2 e $W_1 \cap W_2$.

(b) Si giustifichi il fatto che $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

2. Si consideri la base $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (2, 0, 1), (0, -1, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(1, 3, -1) = (1, 1, -1, 0) \quad f(2, 0, 1) = (0, 0, 1, -1) \quad f(0, -1, 1) = (1, 0, -1, 0)$$

(a) Si trovino le matrici di cambio di base ${}_{\text{can}}A_{\mathcal{B}}$ e ${}_{\mathcal{B}}A_{\text{can}}$ dalle base $\mathcal{B}$ alla base canonica can di $\mathbb{R}^3$ e dalla base canonica can di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$.

(b) Si giustifichi il fatto che, per un elemento generico (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$, si ha necessariamente

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y + \frac{8}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, 2x - 2y - 3z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \right).$$

3. Dato α in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice A_α in $M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli, nel variare di α , il determinante di A_α .

(b) Si determini per quali valori di α la matrice A_α ha rango 4.

(c) Per i valori di α per cui A_α ha rango 4, si sa che l'unica soluzione, nel variare di α del sistema

$$A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ha $z = \frac{1}{2\alpha-2}$ e $t = \frac{-\alpha}{\alpha-1}$. Si usi il teorema di Cramer per determinare i valori di x e di y .

4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A .

(b) Si determinino basi per ognuno degli autospazi di A .

(c) La matrice A è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.