

$$\textcircled{1} \quad W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$$

$$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x-y-z+t=0\}$$

Basi per

• W_1 : $\begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-y \\ z=t \end{cases}$ Quindi i vettori di questo sottospazio hanno la forma

$$(-y, y, t, t) = y(-1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 1, 1)$$

Ciò, $W_1 = \langle (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$. Siccome questi vettori sono l.i. (non sono multipli uno dell'altro), allora una base per W_1 è $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

• W_2 : $x-y-z+t=0 \rightsquigarrow x = y+z-t$
Quindi i vettori di questo sottospazio hanno la forma

$$(y+z-t, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1).$$

Allora $W_2 = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle$. Questi 3 vettori sono l.i.:

$$\alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

Quindi $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ è una base per W_2 .

• $W_1 \cap W_2$: $\begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{matrice completa } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 \cdot \frac{-1}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

variabili
dominanti

variabile
libera t

Metteno $t=1$ ottengo

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \text{---} \end{cases}$$

Quindi una base per $W_1 \cap W_2$ è

$$\left\{ (0, 0, 1, 1) \right\}$$

b) Dalla formula di Grassmann abbiamo

$$\begin{aligned} \dim(W_1 + W_2) &= \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 \\ &= 2 + 3 - 1 = 4 \end{aligned}$$

e quindi $W_1 + W_2$ è l'unico sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 4, ovvero $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$

$$\textcircled{2} \quad (a) \quad {}_{\text{can}} A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_B A_{\text{can}} = ({}_{\text{can}} A_B)^{-1}$$

Quindi calcolo la matrice inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \det({}_{\text{can}} A_B) &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{sviluppo lungo} \\ &\quad \text{riga 1} \\ &= 1 - 2 \cdot (3 - 1) = -3 \end{aligned}$$

Cofattori

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{31} &= (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & c_{22} &= (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & c_{32} &= (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= -2 & &= 1 & &= 1 \\
 c_{13} &= (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & c_{23} &= (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & c_{33} &= (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= 3 & &= -3 & &= -6
 \end{aligned}$$

Quindi la matrice inversa è ${}_B A_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) ${}_{\text{can}} M_{\text{can}}(f) = {}_{\text{can}} M_B(f) \cdot {}_B A_{\text{can}}$ dal teorema del cambio di base.

Adesso, ${}_{\text{can}} M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ e ${}_{\text{can}} M_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & -2 & -3 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e, quindi}$$

$f(x, y, z, t)$ è ottenuta moltiplicando ${}_{\text{can}} M_{\text{can}}(f)$ per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, ovvero

$$f(x, y, z, t) = \left(-\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}y + \frac{8}{3}z, -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z, 2x - 2y - 3z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \right)$$

③ $A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$a) \det A_\alpha = (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$
 lungo
 riga 2

$$\det \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha^2$$

$\downarrow$
 lungo
 riga 1

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha$$

$\downarrow$
 lungo
 colonna 2

$$\text{Quindi } \det A = 2\alpha^2 - 2 \cdot \alpha$$

$$b) A_\alpha \text{ ha rango } < 4 \Leftrightarrow \det A_\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2\alpha - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1$$

$$\text{Quindi } A_\alpha \text{ ha rango } 4 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq 1$$

$$c) \text{ Se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq 1, \text{ per il teorema di Cramer}$$

abbiamo che la soluzione di $A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{2\alpha^2 - 2\alpha} \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -\alpha & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{2\alpha^2 - 2\alpha}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ dato che } R_3 = R_4$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -\alpha & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \underset{\text{Colonna 4}}{\downarrow} \begin{matrix} (-1)^{3+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{4+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \\ -\alpha & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\underset{\text{Colonna 1}}{\downarrow} = - \left((-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right) + \left((-1)^{1+1} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-\alpha) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -8 + 8 + (-\alpha)(2-\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha$$

$$\text{Quindi } y = \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{2\alpha^2 - 2\alpha} = \frac{\alpha - 2}{2\alpha - 2}$$

$$(4) \text{ a) } p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & -3 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{riga 2}}{\downarrow} = (-1)^{2+2} (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (4-\lambda) \left((1-\lambda)^2 - 9 \right)$$

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 4-\lambda = 0 \quad \vee \quad (1-\lambda)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 4 \quad \vee \quad 1-\lambda = 3 \quad \vee \quad 1-\lambda = -3$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 4 \quad \vee \quad \lambda = -2 \quad \vee \quad \lambda = 4$$

b) $E_A(4)$: matrice completa: $(A - 4I \mid 0)$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{R_1}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Variazabili libere y e z

$$\left. \begin{matrix} y=1 \\ z=0 \end{matrix} \right] \rightsquigarrow x=1 \rightsquigarrow (1, 1, 0)$$

$$\left. \begin{matrix} y=0 \\ z=1 \end{matrix} \right] \rightsquigarrow x=-1 \rightsquigarrow (-1, 0, 1)$$

$E_A(-2)$: matrice completa $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{R_1}{3} \\ R_2 \rightarrow \frac{R_2}{6} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 6R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ variabile libera z

$$z=1 \rightsquigarrow \begin{cases} y=0 \\ x=z=1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{Base } (1, 0, 1)$$

c) la matrice è diagonalizzabile perché $m_A(4) = m_g(4) = 2$
 $m_A(-2) = m_g(-2) = 1$