SEGNALI E SISTEMI
22 giugno 2026
primo appello
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2025-2026)
SOLUZIONI

Esercizio 1 [punti 7]

Sia dato un sistema a tempo continuo descritto dall'equazione

$$y(t) = e^{-t} \int_{t-2}^{t+3} x(u)\, e^{u}\, du$$

1. Dire se il sistema è: causale [1 punto], lineare [1 punto], tempo invariante [1 punto] e BIBO stabile [1 punto].
2. Identificare la risposta al gradino $x(t) = 1(t)$ [3 punti].

Soluzione.

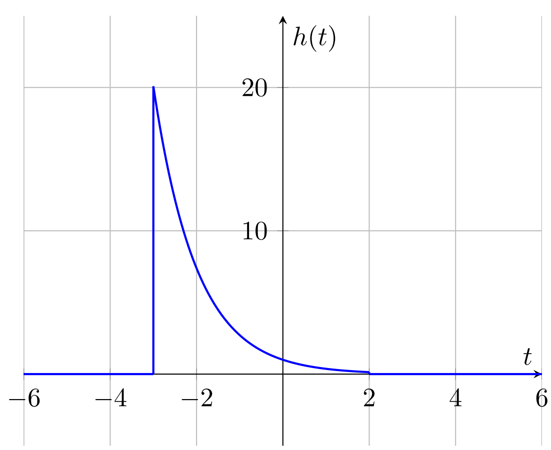
1. Il sistema è evidentemente un sistema convoluzionale, in cui

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot \underbrace{e^{-(t-u)}\, 1(t-u+3)\, 1(u-t+2)}_{h(t-u)}\, du$$

la cui risposta impulsiva è

$$h(t) = e^{-t}\, 1(t+3)\, 1(2-t) = \begin{cases} e^{-t} & , -3 < t < 2 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

come illustrato in figura.



Pertanto il sistema è lineare, tempo invariante e BIBO stabile (poichè la risposta impulsiva è limitata nel tempo e nelle ampiezze, e quindi assolutamente integrabile), mentre non è causale.

2. Per la risposta al gradino identifichiamo tre regioni separate nella convoluzione, ovvero:

   (a) Per $t+3<0$, ovvvero $t<-3$, si ha $y(t)=0$.

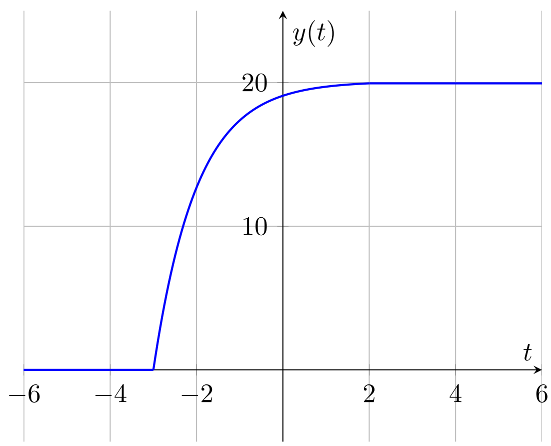
   (b) Per $t+3>0$ e $t-2<0$, ovvero per $-3<t<2$, si ha

   $$y(t) = e^{-t} \int_0^{t+3} e^u \, du = (e^{t+3}-1)\, e^{-t} = e^3 - e^{-t} \; .$$

   (c) Per $t+3>0$ e $t-2>0$, ovvero per $t>2$, si ha

   $$y(t) = e^{-t} \int_{t-2}^{t+3} e^u \, du = (e^{t+3}-e^{t-2})\, e^{-t} = e^3 - e^{-2} \; .$$

   Il risultato è illustrato in figura.



Esercizio 2 [punti 7]

Dato il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \mathrm{sinc}(t) \cdot e^{j\pi t} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2(\tfrac{t}{2}) \cdot e^{-j\pi t}$$

1. Dire per quali passi di campionamento T_s il segnale può essere ricostruito esattamente dai suoi campioni $x(nT_s)$ [3 punti].

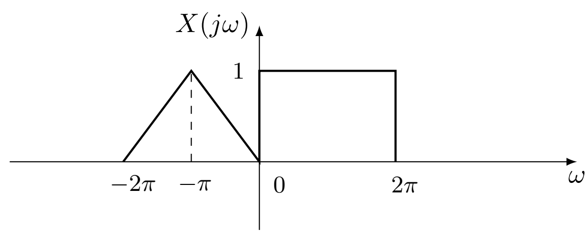
2. Il segnale $x(t)$ viene campionato con passo $T_s = 1\,\mathrm{sec}$ e ricostruito dai campioni utilizzando un filtro ricostruttore (interpolatore) passa basso ideale con pulsazione di taglio canonica. Trovare il segnale ricostruito $y(t)$ e la sua trasformata di Fourier $Y(j\omega)$ [4 punti].

Soluzione.

1. Per rispondere alla domanda si applica il teorema del campionamento. E' necessario perciò calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$, $X(j\omega)$, per trovare la banda del segnale, ovvero

   $$X(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega-\pi}{2\pi}) + \mathrm{triang}(\tfrac{\omega+\pi}{\pi})$$

   rappresentata in figura.

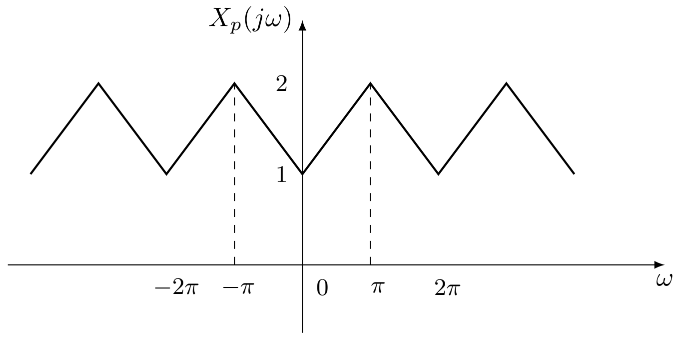
   

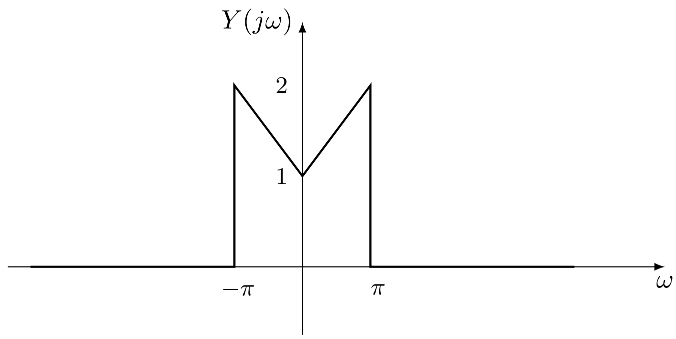
   Il segnale è quindi a banda rigorosamente limitata. La pulsazione massima del segnale è $\omega_M = 2\pi$; non vi sono impulsi in $\omega_M = 2\pi$ per cui, per il teorema di Shannon, deve essere $\omega_s \geq 2\omega_M = 4\pi$ e $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s} \leq \frac{1}{2}$.

2. Poichè $T_s > \frac{1}{2}$, siamo in presenza di aliasing. La trasformata di Fourier del segnale ricostruito risulta

   $$Y(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\tfrac{\omega}{2\pi/T_s}\right) X_p(j\omega)\ , \qquad X_p(j\omega) = \underset{2\pi/T_s}{\mathrm{rep}}\ X(j\omega)$$

   in cui $2\pi/T_s = 2\pi$, ed in cui $X_p(j\omega)$, illustrato in figura, è legato alla trasformata di Fourier a tempo discreto del segnale campionato (a meno di un fattore di scala, che qui è unitario, e di un cambio di notazione $\theta \to \omega$).





Applicando il filtro ricostruttore passa basso ideale con $\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \pi$, ovvero con funzione di trasferimento $\mathrm{rect}(\omega/2\pi)$, si ottiene

$$Y(j\omega) = 2\ \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi}) - \mathrm{triang}(\tfrac{\omega}{\pi})$$

da cui

$$y(t) = 2\,\mathrm{sinc}(t) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2(\tfrac{t}{2})$$

Esercizio 3 [punti 7]

Sia dato il sistema LTI descritto dall'equazione differenziale

$$y'''(t) + 6y''(t) + 9y'(t) = x'(t) + ax(t) \; .$$

1. Trovare la funzione di trasferimento [1 punto].
2. Dire per quali valori (complessi) di a il sistema è BIBO stabile [2 punti].
3. Per $a = 2$ trovare la risposta impulsiva $h(t)$ [3 punti].
4. Per $a = 0$, trovare la risposta forzata in regime permanente se $x(t) = e^{j3t}$ [1 punto].

Soluzione.

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione

$$H(s) = \frac{s+a}{s^3 + 6s^2 + 9s} = \frac{s+a}{s(s+3)^2}$$

2. I poli sono in $s = 0$ e $s = -3$ (doppio). Il polo instabile (in $s = 0$) viene cancellato dallo zero se $a = 0$, perciò il sistema è BIBO stabile solo per $a = 0$, per tutti gli altri valori di a il sistema non è BIBO stabile.

3. Per $a = 2$ si ha

$$H(s) = \frac{s+2}{s(s+3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{s+3}$$

   in cui i coefficienti A, B e C si trovano come segue:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{s\to 0} \frac{s(s+2)}{s(s+3)^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{(s+3)^2} = \frac{2}{9} \\
B &= \lim_{s\to -3} \frac{(s+3)^2(s+2)}{s(s+3)^2} = \lim_{s\to -3} \frac{s+2}{s} = \frac{1}{3} \\
C &= \lim_{s\to -3} \frac{d}{ds}\frac{s+2}{s} = \lim_{s\to -3} -\frac{2}{s^2} = -\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

   Quindi, si ottiene

$$H(s) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(s+3)^2} - \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{s+3}$$

   da cui, antitrasformando,

$$h(t) = \tfrac{2}{9}1(t) + \tfrac{1}{3}t\cdot e^{-3t}1(t) - \tfrac{2}{9}e^{-3t}1(t)$$

   con $1(t)$ gradino unitario.

4. In regime permanente l'ingresso $x(t) = e^{j3t}$ è una autofunzione del filtro, a patto che il sistema sia BIBO stabile, cosa che si verifica con la scelta $a = 0$, almeno per la risposta forzata che è quanto richiesto dalla domanda. Pertanto, per $t \to \infty$ (regime permanente) abbiamo

$$y_f(t) = H(j3)\, e^{j3t} = \frac{1}{(j3+3)^2}\, e^{j3t} = -\tfrac{j}{18}\, e^{j3t}$$

Esercizio 4 [punti 3]

Trovare i coefficienti della serie di Fourier del segnale

$$x(t) = \text{rep}_2 \, \text{rect}(t - \tfrac{1}{5}) \, e^{j2\pi t}$$

Quanto vale il coefficiente X_0, ovvero la componente continua (o valor medio) del segnale?

Soluzione. Si può procedere in vari modi. Osservando che il segnale $x(t)$ è la versione traslata (prima) e modulata (poi) di un'onda quadra con duty cycle $d = \frac{1}{2}$, ovvero

$$x(t) = u(t - \tfrac{1}{5}) \, e^{j2\omega_0 t} \; , \qquad u(t) = \text{rep}_2 \, \text{rect}(t) \, , \;\; \omega_0 = \pi$$

dalle regole di traslazione/modulazione, si ottiene

$$\begin{aligned} X_k &= U_n \, e^{-jn\omega_0 \frac{1}{5}} \Big|_{n=k-2} \\ &= U_{k-2} \, e^{-j\frac{\pi}{5}(k-2)} \\ &= \tfrac{1}{2}\text{sinc}(\tfrac{1}{2}(k-2)) \, e^{-j\frac{\pi}{5}(k-2)} \end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato il risultato noto $U_k = \frac{1}{2}\text{sinc}(\frac{1}{2}k)$. Per il valor medio abbiamo

$$m_x = X_0 = \tfrac{1}{2}\text{sinc}(-1) \, e^{j\frac{2}{5}\pi} = 0$$

poichè $\text{sinc}(-1) = 0$.

Esercizio 5 [punti 3]

Date le seguenti coppie di segnali. dire quali possono essere coppie ingresso-uscita di un sistema LTI (motivare le risposte):

1. $x(t) = 3e^{j(3t+3)} \rightarrow y(t) = -\sin(3t+3)$ [1 punto].
2. $x(n) = 3\sin(3n+3) \rightarrow y(n) = -\pi e^{j(3n+3)}$ [1 punto].
3. $x(n) = 3\sin(3n+3) \rightarrow y(n) = 0$ [1 punto].

Soluzione. I sistemi LTI trasformano l' esponenziale complesso ad una determinata pulsazione/fase, in un esponenziale alla stessa pulsazione/fase, al più modulandone ampiezza e fase, ma non possono dare in uscita esponenziali complessi a pulsazioni/fasi non presenti nell'ingresso. Perciò:

1. No. $y(t) = -\sin(3t+3) = -\frac{1}{2j}e^{j(3t+3)} + \frac{1}{2j}e^{-j(3t+3)}$. Il termine alla pulsazione -3 non può essere prodotto in uscita da un sistema LTI con ingresso $x(t)$.

2. Sì. Le pulsazioni del segnale di ingresso sono ± 3 mentre il segnale di uscita ha solo la componente alla pulsazione 3 e può essere ottenuto con un filtro LTI che elimi le pulsazioni in un intorno di -3.

3. Sì, per esempio se il filtro LTI in questione è passa basso ideale con pulsazione di taglio < 3.

Esercizio 6 [punti 3]

In MatLab, i valori della trasformata di Fourier di un segnale reale $x(t)$ sono collezionati nel vettore complesso X di lunghezza $N = 256$ associato a pulsazioni spaziate di un valore ω_0 e collezionate nel vettore $\omega = [-128, 127] \cdot \omega_0$. Dire se uno dei seguenti codici dà una rappresentazione corretta del segnale $x(t)$ e, in caso affermativo, indicare quale (motivare opportunamente la risposta).

1. $T = 2\pi/(N\omega_0)$;
   $x = \text{ifftshift}(\text{ifft}(X))/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\text{plot}(t, \text{real}(x))$;

2. $T = 2\pi/\omega_0$;
   $x = \text{ifft}(\text{ifftshift}(X))/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\text{plot}(t, x)$;

3. $T = 2\pi/(N\omega_0)$;
   $x = \text{ifft}(\text{ifftshift}(X))/N$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\text{plot}(t, \text{real}(x))$;

4. $T = 2\pi/\omega_0$;
   $x = \text{ifft}(X)/T$;
   $t = (0 : N-1) * T$;
   $\text{plot}(t, x)$.

Soluzione. Nessuno. Nella 1 l'ordine di fft e fftshift è invertito. Nella 2 il passo di campionamento è errato. Nella 3 si divide per N invece che per T. Nella 4 la regola di inversione è errata in quanto manca ifftshift, e il passo di campionamento è sbagliato.