

08/06/2025

Correzione Compito modello

① $\lambda \in \mathbb{R}$

$$W = \langle (1, 1, 1, 0), (-2, \lambda, 6, -5), (-1, 1, 7, -5) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

a) Base di W nel variare di λ ?

Mettranno i vettori come righe di una matrice e facciamo eliminazione Gaussiana.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & \lambda & 6 & -5 \\ -1 & 1 & 7 & -5 \end{pmatrix} &\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 7 & -5 \\ -2 & \lambda & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & -5 \\ 0 & \lambda+2 & 8 & -5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{R_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \lambda+2 & 8 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - (\lambda+2)R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 8-4(\lambda+2) & -5+\frac{5}{2}(\lambda+2) \end{pmatrix} \\ &\quad \quad \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4\lambda & \frac{5\lambda}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, allora questa matrice è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ed è già in forma ridotta!

Una base per W è ottenuta prendendo le righe della matrice in forma ridotta, ovvero

$$W = \langle (1, 1, 1, 0), (0, 1, 4, -\frac{5}{2}) \rangle$$

Se $\lambda \neq 0$, allora $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4\lambda & \frac{5\lambda}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{R_3}{-4\lambda}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$ base.

se $\delta \neq 0$, allora questi 3 vettori costituiscono una base di W .

b) Trovare un complemento di W per ogni scelta di δ . Per fare questo aggiungiamo delle righe alle matrici precedenti in modo da ottenere una matrice di rango 4.

• $\delta = 0$ la matrice in forma ridotta era

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 quindi se consideriamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 abbiamo una matrice di rango 4

per cui le sue righe formano una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi $\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ sono una base di un complemento di W .

• $\delta \neq 0$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \leadsto$ aggiungendo un vettore riga si ottiene

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto$ le sue righe formano una base di $\mathbb{R}^4$ in quanto la matrice ha rango 4 e quindi

$\{(6, 0, 0, 1)\}$ è una base di un complemento di W .

$$(2) \begin{cases} 2x - y + t = 3 \\ 2z - t = 0 \\ 3x - z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$a) (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$b) \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1 \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{R_2}{-3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -3 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ R_3 \rightarrow R_3 + 3R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1/3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ R_3 \rightarrow \frac{R_3}{2} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1/3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1/3 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & | & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{rk } A = 3 \\ \text{rk}(A|b) = 4 \end{array}$$

Dal teorema di Rouché-Capelli, il sistema non ha soluzioni!

$$\begin{array}{l} \text{(c)} \\ A = \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \varphi_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ v \longmapsto Av \end{array}$$

$$\text{(i)} \quad R(A) = \langle (1, 1, -3, 0), (0, 1, -2, -1/3), (0, 0, 1, -1/2) \rangle$$

Sono l.i. e allora costituiscono una base.

(ii) L'immagine ha per base le colonne di A che diventano dominanti in una sus

forma ridotta, ovvero $\text{Im}(\varphi_A)$ ha per base
le prime 3 colonne di A , ovvero

$$\{(2, 0, 3, -1), (-1, 0, 0, -1), (0, 2, -1, 3)\}$$

(iii) φ_A non è suriettiva poiché

$$\dim \text{Im}(\varphi_A) = 3 \quad \text{e} \quad \dim \mathbb{R}^4 = 4 \\ \neq$$

Teorema nullità $\rightarrow$ rango dice

$$\dim \ker(\varphi_A) + \underbrace{\dim \text{Im}(\varphi_A)}_{=3} = 4$$

Allora $\dim \ker(\varphi_A) = 1$. Quindi φ_A non è
iniettiva poiché $\ker(\varphi_A) \neq \{0\}$

(iv) vediamo se $(3, 0, -2, 0)$ è combinazione
lineare della base di $\text{Im}(\varphi_A)$.

$$(3, 0, -2, 0) = \alpha(2, 0, 3, -1) + \beta(-1, 0, 0, -1) + \gamma(0, 2, -1, 3)$$

$$\begin{aligned} (=) \quad \begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ 0 = 2\gamma \\ -2 = 3\alpha - \gamma \\ 0 = -\alpha - \beta + 3\gamma \end{cases} & \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3 = 2\alpha - \beta \\ \gamma = 0 \\ -2 = 3\alpha \\ 0 = -\alpha - \beta \end{cases} \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \beta = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} \\ \alpha = -\frac{2}{3} \\ \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \times \quad \text{Sistema impossibile}$$

Allora questo vettore non appartiene a $\text{Im}(V_A)$.

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad \det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

↓
Sviluppo lungo 1ª riga

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lungo} \\ \text{prima riga}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (-1) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lungo} \\ \text{prima riga}}}{=} (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2(-1) + (-1) \cdot (-6) = 4$$

Allora A è invertibile perchè $\det A \neq 0$.

$$(b) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 & a \\ b & 7/4 & -3/2 & c \\ d & e & 1/2 & -1/4 \\ -1 & f & g & h \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4}-f & \frac{1}{2}-g & a-h \\ b-1 & \frac{5}{4}+f & -\frac{1}{2}+g & 2a+c+h \\ b+d-1 & 1+e+f & \frac{1}{2}+g & 3a+c-\frac{1}{4}+h \\ -b-2d+1 & -\frac{7}{4}-2e-f & \frac{1}{2}-g & -c+\frac{1}{2}-h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{4}-f=0 \rightsquigarrow f=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}-g=0 \rightsquigarrow g=\frac{1}{2}$$

$$b-1=0 \rightsquigarrow b=1$$

$$b+d-1=0 \rightsquigarrow d=0$$

$$1+e+f=0 \rightsquigarrow e=-\frac{3}{4}$$

$$f=-\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} a-h=0 \\ 2a+c+h=0 \\ 3a+c-\frac{1}{4}+h=0 \\ -c+\frac{1}{2}-h=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=h \\ c=-3h \\ 3h-3h-\frac{1}{4}+h=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ h=\frac{1}{4} \end{cases} \quad c=-\frac{3}{4}$$

$$(c) \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo per A^{-1} in entrambi i lati ottenendo la soluzione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 7/4 & -3/2 & -3/4 \\ 0 & -3/4 & 1/2 & -1/4 \\ -1 & -1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5/4 \\ 27/4 \\ -7/4 \\ -9/4 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x, y, z) = (3x - y, -x + 2y - z, -y + 3z)$$

$$(a) \quad M_{\text{Can Can}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(1,0,0)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(0,1,0)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{f(0,0,1)}$

$$(b) \quad f(1, 2, 1) = (3 \cdot 1 - 2, -1 + 2 \cdot 2 - 1, -2 + 3 \cdot 1)$$

$$= (1, 2, 1)$$

(c) Questa matrice ha autovalori 3 e 4. Ma dalla parte (b) abbiamo anche che

$$f(1, 2, 1) = \underbrace{1}_{\text{autovalore}} \cdot (1, 2, 1)$$

Siccome ho 3 autovalori diversi, la matrice è diagonalizzabile!

c) Calcoliamo basi per tutti gli autospazi:

$$E_A(3): \quad \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A - 3I} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{matrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right)$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow \\ R_1 \rightarrow -R_1 \\ R_2 \rightarrow -R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

z è variabile libera

Scelgo $z = 1$

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$E_A(3) = \langle (-1, 0, 1) \rangle$$

$$E_A(4): \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

variabile libera z .

Scelgo $z = 1$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$E_A(4) = \langle (1, -1, 1) \rangle$$

$$E_A(1) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{A-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \text{variabile libera} \\ z \end{array}$$

Metto $z=1$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$E_A(1) = \langle (1, 2, 1) \rangle$$

Base di autovettori

$$B = \{ (-1, 0, 1), (1, -1, 1), (1, 2, 1) \}$$

$$S = {}_{\text{can}} A_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$