$\text{M}\small{\text{ATEMATICA}}$ (Chimica e Chimica Industriale)

Modello per il 3^o Compitino
29 maggio 2025

1. Sia s un parametro reale e si consideri il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^4$
$$W_s = \langle (1,1,1,0), (-2,s,6,-5), (-1,1,7,-5) \rangle.$$
   (a) Si trovi una base per W_s nel variare di s.
   (b) Per ogni scelta di s, si trovi un complemento di W_s in $\mathbb{R}^4$.

2. Si consider il sistema di equazioni a coefficienti reali
$$\begin{cases} 2x - y + t = 3 \\ 2z - t = 0 \\ 3x - z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$
   (a) Si determini la matrice completa associata al sistema di equazioni, e la denotiamo per $(A|b)$, dove A è la matrice dei coefficienti e b è il vettore dei termini noti.
   (b) Si usi il teorema di Rouchè-Capelli per determinare il numero di soluzioni del sistema.
   (c) Considerando soltanto la matrice A e la funzione lineare associata
$$\varphi_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$
   definita da $\varphi_A(v) = Av$. Si determini
      i. una base per il sottospazio generato dalle righe di A;
      ii. una base per l'immagine $\mathsf{Im}(\varphi_A)$;
      iii. se la funzione lineare è iniettiva e/o suriettiva e perchè;
      iv. se il vettore $(3,0,-2,0)$ appartiene all'immagine di φ_A e perchè.

3. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Si calcoli il determinante di A e si giustifichi il fatto di A essere invertibile.
   (b) Si calcolino le entrate mancanti della matrice inversa di A:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & a \\ b & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & c \\ d & e & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -1 & f & g & h \end{pmatrix}$$
   (c) Si risolva il sistema di equazioni
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Si consideri la seguenti funzione lineare
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (3x - y, -x + 2y - z, -y + 3z)$$
   (a) Si determini la matrice M di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$
   (b) Si calcoli $f(1,2,1)$.
   (c) Sapendo che 3 e 4 sono autovalori di f, si giustifichi il fatto che M è diagonalizzabile.
   (d) Si trovi una base $\mathcal{B}$ e una matrice di cambio di base $S := {}_{\mathsf{can}}A_{\mathcal{B}}$ per cui il prodotto $S^{-1}MS$ sia una matrice diagonale.