MATEMATICA (15 cfu)

Prof. F. Bottacin, G. Peruginelli

1º Appello — 28 gennaio 2022

Esercizio 1. Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa queste proprietà: $v_1 = (1, -1, 2)$ appartiene al nucleo di ϕ, $\text{Im}(\phi)$ è il piano di $\mathbb{R}^3$ avente vettore normale uguale a v_1, $v_2 = (1, -1, -1)$ è un autovettore di ϕ relativo all'autovalore $\lambda = -1$.

(a) Determinare un vettore v_3 che sia ortogonale a v_1 e a v_2. Mostrare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e che $\mathcal{C} = \{v_2, v_3\}$ è una base di $\text{Im}(\phi)$.

(b) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$, il vettore $v = (t, 1, 1)$ appartiene a $\text{Im}(\phi)$?
Facoltativo: Mostrare che $\{\phi(v_2), \phi(v_3)\}$ è una base di $\text{Im}(\phi)$.

(c) Supporre che $\phi(v_3) = (1, -3, -2)$. Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ associata a ϕ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(d) Determinare il polinomio caratteristico di ϕ e i suoi autovalori. Dire inoltre se ϕ è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & t & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare il rango di A al variare di $t \in \mathbb{R}$ per mezzo dell'algoritmo di Eliminazione di Gauss.

(b) Sia $t = 5$ per il resto dell'esercizio. Sia U lo spazio vettoriale generato dalle colonne di A; determinare una base $\mathcal{B}$ di U estraendola dalle colonne di A.
Facoltativo: Determinare un'equazione cartesiana di U.

(c) Determinare una base del $\text{Ker}(A)$.

(d) Determinare tutte le soluzioni del sistema $AX = v$, con $v = (1, 1, 2)$.

Esercizio 3. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ passante per il punto $P = (1, -1, 2)$ e avente direzione $v_r = (1, 2, 1)$. Sia s la retta di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = -4 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni cartesiane di r e le equazioni parametriche di s.

(b) Determinare se r e s sono parallele, sghembe o incidenti.

(c) Determinare un vettore che sia ortogonale a v_r e v_s (vettore direzione di s).

(d) Determinare l'equazione cartesiana del piano π contenente la retta s e parallelo a r.

(e) **Facoltativo:** Calcolare la distanza tra le due rette r e s.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\ln(x^2 + 1)}$$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f, specificando se si tratta di massimi o minimi relativi o assoluti.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 5. Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' + (\ln x)\, y = \ln x$$

con la condizione iniziale $y(e) = 2$.

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - \ln(x^2 + y^2)$.

(a) Determinare il gradiente di f e la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}$ di f, ove $v = (1, 2)$, nel punto $P = (1, 1)$.

(b) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello della funzione f passante per il punto $P = (1, 1)$.

(c) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo di f.