

MATEMATICA (15 cfu)

PROF. F. BOTTACIN, G. PERUGINELLI

2° Appello — 14 febbraio 2022

---

**Esercizio 1.** Sia  $W$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  di equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

e  $U$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^4$ :

$$U = \{(a + 2b, -a + b, -2b + c, a + c) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

- (a) Determinare una base e la dimensione di  $W$ .
- (b) Mostrare che  $U$  è un sottospazio e determinare una sua base e la dimensione.
- (c) Determinare una base e la dimensione di  $U \cap W$  e di  $U + W$ .
- (d) (FACOLTATIVO) Determinare un sottospazio  $Z$  tale che  $(U \cap W) \oplus Z = U$ .

**Esercizio 2.** Siano

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 2), \quad v_3 = (-1, 0, 1)$$

e sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbb{R}^3$  tale che:

$$f(v_1) = (1, 1, 1), \quad f(v_2) = (-4, 10, 3), \quad f(v_3) = (-3, 5, 1)$$

- (a) Determinare le immagini tramite  $f$  dei 3 vettori  $e_1, e_2, e_3$  della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Determinare la matrice  $A$  associata a  $f$  rispetto alla base canonica su dominio e codominio. Determinare  $f(x, y, z)$  per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
- (c) Determinare una base dell'immagine di  $f$  e una base del nucleo di  $f$ .
- (d) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $f$ . Dire se la matrice  $A$  è diagonalizzabile e in caso affermativo determinare la matrice diagonale associata a  $f$ .

**Esercizio 3.** Consideriamo in  $\mathbb{R}^3$  il punto  $P_1 = (2, 1, 0)$  e i vettori  $v_1 = (-1, 1, 0), v_2 = (0, 0, 1)$ . Sia  $\pi_2$  il piano di equazione  $-2x + z = 1$ .

- (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano  $\pi_1$  passante per  $P_1$  e parallelo ai vettori  $v_1, v_2$ .
- (b) Determinare le equazioni parametriche della retta  $r = \pi_1 \cap \pi_2$ .
- (c) Calcolare la distanza di  $P_1$  da  $r$ .

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x} e^{\frac{1}{x^2-3}}$$

- (a) Determinare il dominio  $D$  di  $f$ , eventuali simmetrie di  $f$ , i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$  e gli eventuali asintoti di  $f$ .
- (b) Calcolare la derivata di  $f$ , studiare la crescita e decrescita di  $f$ , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di  $f$  e calcolare anche eventuali limiti significativi della derivata prima.
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

**Esercizio 5.** (a) Calcolare il seguente integrale generalizzato:

$$\int_{-\infty}^0 (1 - \cos x) e^x dx$$

(b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y - 8x = 0.$$

**Esercizio 6.** Si consideri la funzione  $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + 4y^2 - 6y$

- (a) Determinare il gradiente di  $f$  e la derivata direzionale  $\frac{\partial f}{\partial v}$  di  $f$ , ove  $v = (1, -1)$ , nel punto  $P = (2, 1)$ .
- (b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente alla curva di livello della funzione  $f$  passante per il punto  $P = (2, 1)$ .
- (c) Scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente al grafico  $f$  nel punto  $P = (2, 1)$ .
- (d) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo di  $f$ .