

# MATEMATICA

PROF. F. BOTTACIN, J. VITÓRIA

1° Appello — 20 giugno 2022

---

**Esercizio 1.** Si considerino i seguenti vettori in  $\mathbb{R}^4$

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia  $K$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato da  $u, v, w$  e  $p$ .

- (a) I vettori  $u, v, w$  e  $p$  sono linearmente indipendenti? Si giustifichi la risposta.
- (b) Si determini una base per  $K$ .

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo la funzione lineare  $f_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definita da

$$f_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcoli il determinante di  $A$ . La matrice è invertibile? Se sì, si trovi l'inversa.
- (b) Si determinino basi per  $N(f_A)$  e  $\text{Im}(f_A)$  e si indichi se  $f_A$  è iniettiva e/o suriettiva.
- (c) Il vettore  $u = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  appartiene all'immagine di  $f_A$ ? In caso positivo, si determinino tutti i vettori  $v$  di  $\mathbb{R}^3$  per cui  $f_A(v) = u$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione

$$f(x) = x e^{\frac{2}{x^2-3}}$$

- (a) Determinare il dominio  $D$  di  $f$ , eventuali simmetrie di  $f$ , i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$  e gli eventuali asintoti orizzontali o verticali di  $f$  (non è richiesta la ricerca di asintoti obliqui).
- (b) Calcolare la derivata di  $f$ , studiare la crescita e decrescita di  $f$ , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di  $f$ .
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

**Esercizio 4.** (a) Calcolare il seguente integrale indefinito (*suggerimento*: usare la sostituzione  $x^2 = z$ )

$$\int x^3 \sin(x^2) dx$$

(b) Determinare la soluzione generale  $y(x)$  dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = 3x + 2$$

**Esercizio 5.** Si consideri la funzione  $f(x, y) = x^3 - y^2 - 4xy - 3x$ .

- (a) Determinare il gradiente di  $f$  e la derivata direzionale  $\frac{\partial f}{\partial v}$  di  $f$ , ove  $v = (1, 2)$ , nel punto  $P = (1, -1)$ .
- (b) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello della funzione  $f$  passante per il punto  $A = (-2, 3)$ .
- (c) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo di  $f$ .