

MATEMATICA

PROF. F. BOTTACIN, G. PERUGINELLI, J. VITÓRIA

2° Appello — 7 luglio 2022

Esercizio 1. Sia U il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai seguenti vettori:

$$u_1 = (1, 1, 0, -2) \quad u_2 = (0, 2, 1, -1)$$

- (a) Determinare le equazioni cartesiane di U .
- (b) Determinare se il vettore $u = (3, -1, -2, -4)$ appartiene a U e determinare le coordinate di u rispetto alla base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ di U .
- (c) Completare \mathcal{B} a una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo la cui matrice, rispetto alle basi canoniche, è:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il rango di A e la dimensione del nucleo di f . Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.
- (b) Determinare basi del nucleo e dell'immagine di f .
- (c) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f .
- (d) Determinare una base di ciascun autospazio e dire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{x^2}{|x-1|} \right)$$

- (a) Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescenza di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 4. (a) Calcolare il seguente integrale indefinito (*suggerimento*: usare la sostituzione $\sqrt{x} = z$)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} + 2} dx$$

(b) Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$(1 + x^2)y' - 3xy^2 = 0$$

con la condizione iniziale $y(0) = -2$.

Esercizio 5. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 3x^2y - y^3 + \frac{6}{x}$$

- (a) Determinare il gradiente di f e la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}$ di f , ove $v = (1, 1)$, nel punto $P = (1, 2)$.
- (b) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello della funzione f passante per il punto $A = (1, 0)$.
- (c) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo di f .