

MATEMATICA

PROF. F. BOTTACIN, G. PERUGINELLI, J. VITÓRIA

4° Appello — 21 settembre 2022

Esercizio 1. Si considerino i seguenti punti in \mathbb{R}^3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcoli l'area del parallelogramma determinato dai vettori \vec{OA} e \vec{OB} .
- (b) I vettori \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} sono linearmente indipendenti? Si giustifichi la risposta.
- (c) Si trovi una base \mathcal{B} per il sottospazio W di \mathbb{R}^3 generato da \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} .
- (d) Si trovi una base di un sottospazio K di \mathbb{R}^3 tale che $K \oplus W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si usi lo sviluppo di Laplace (indicando la scelta per riga o colonna) per calcolare il determinante di A .
- (b) La matrice A è invertibile? Si giustifichi.
- (c) Si determinino tutti gli autovalori di A .
- (d) La matrice A è diagonalizzabile? In caso positivo si trovi una base di \mathbb{R}^3 costituita da autovettori di A .

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln \left(\frac{4}{x+2} - \frac{1}{x-1} \right)$$

- (a) Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescenza di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 4. (a) Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{(2x-1)^n}$$

(b) Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' - x \sin(x) y^2 = 0$$

con la condizione iniziale $y(0) = 1/3$.

Esercizio 5. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + xy + 3x - y}{y}$$

- (a) Determinare il gradiente di f e la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}$ di f , ove $v = (3, -2)$, nel punto $P = (-1, 1)$.
- (b) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello della funzione f passante per il punto $A = (2, 1)$.
- (c) Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo di f .