

# MATEMATICA

1° Appello — 27 gennaio 2023

---

**Esercizio 1.** Nello spazio  $\mathbb{R}^3$  sono dati il punto  $P = (5, -2, -2)$  e i piani  $\pi_1 : x - 2z + 1 = 0$  e  $\pi_2 : 2x + y - 2 = 0$ .

- Determinare l'angolo  $\alpha$  formato dai piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
- Determinare la proiezione ortogonale di  $P$  sul piano  $\pi_1$ .
- I piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  si intersecano lungo una retta  $r$ . Scrivere le equazioni parametriche di  $r$ .
- Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  passante per il punto  $P$  e parallela ad entrambi i piani  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .
- Verificare che il piano  $\sigma : x + y + 2z + 9 = 0$  è parallelo alla retta  $r$  trovata al punto (c) e calcolare la distanza tra la retta  $r$  e il piano  $\sigma$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'applicazione lineare definita come

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, -x - 3z, y - z, x + 3z),$$

per ogni  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

- Determinare la matrice  $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_4}(f)$  associata a  $f$  rispetto alle basi canoniche.
- Determinare una base del nucleo di  $f$  e la nullità di  $f$ . L'applicazione  $f$  è iniettiva?
- Determinare una base dell'immagine di  $f$  e il rango di  $f$ . L'applicazione  $f$  è suriettiva?
- Determinare se il vettore  $v = (-1, 3, 1, -3)$  appartiene all'immagine di  $f$  e in caso affermativo, determinare la controimmagine  $f^{-1}(v)$ .

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x-2} e^{1/x}$$

- Determinare il dominio  $D$  di  $f$ , eventuali simmetrie di  $f$ , il segno di  $f$ , i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$  e gli eventuali asintoti di  $f$ .
- Calcolare la derivata di  $f$ , studiare la crescita e decrescenza di  $f$ , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di  $f$ .
- Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

**Esercizio 4.** Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx \qquad \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

**Esercizio 5.** Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' = x e^{-x} \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$