MATEMATICA

2^o Appello — 13 febbraio 2023

Esercizio 1. Nello spazio $\mathbb{R}^3$ sia r la retta passante per i punti $A = (0, 2, -1)$ e $B = (4, 0, 1)$ e sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

(a) Determinare un punto C sulla retta s tale che il vettore $\vec{AC}$ sia ortogonale al vettore $\vec{AB}$ e calcolare l'area del triangolo ABC.

(b) Verificare che le rette r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s.

(c) Determinare per quale valore di t esistono delle rette passanti per il punto $P = (1, t, 0)$ che intersecano sia r che s.

(d) Dato il punto $Q = (6, -6, -9)$ determinare la sua proiezione ortogonale sul piano π.

Esercizio 2. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$$

e W il sottospazio generato da $w_1 = (1, 0, 4, -2), w_2 = (1, 1, 1, 0)$.

(a) Determinare una base di U.

(b) Determinare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(c) Per ogni vettore della base di $U \cap W$, determinare le sue coordinate rispetto alla base di U trovata in (a).

(d) Determinare una base di un sottospazio L di $\mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$. Tale sottospazio L è unico?

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2}{3}\,x + \ln\left(\frac{1}{x^2 + 2}\right)$$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 4. (a) Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^3)}{n^2 + 1}$$

(b) Calcolare il seguente integrale indefinito (si utilizzi la sostituzione $y = e^x$):

$$\int e^{2x} \cos(e^x)\,\mathrm{d}x$$

Esercizio 5. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x+1} = 2$$

che verifica la condizione iniziale $y(0) = 3$.