MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

1$^{\text{o}}$ Appello — 27 giugno 2023

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)\, e^{x-x^2}$$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(d) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x = 1$.

Esercizio 2. (a) Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n! + n^2}$$

(b) Calcolare il seguente integrale indefinito (*suggerimento*: usare la sostituzione $x = y^2$)

$$\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$$

(c) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{y \ln y}{x}$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo le due rette

$$r: \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2y-z-1=0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+2z-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

(a) Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente la retta s e parallelo a r.

(c) Dato il punto $R = (2, 0, -1) \in r$ trovare un punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia parallela al piano di equazione $2x + y = 0$.

Esercizio 4. Dato α in $\mathbb{R}$ si consideri la matrice A_α in $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice A_α ha rango 4.

(b) Consideriamo la matrice A_2, cioè, la matrice A_α con $\alpha = 2$.

1. Si determini una base per l'immagine della funzione lineare associata ad A_2.
2. Si determini se il sistema di equazioni

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ha soluzioni.

(c) Per quali valori di α il sistema di equazioni

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ha soluzioni?

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determinino gli autovalori di A.

(b) Si determinino basi per ognuno degli autospazi di A.

(c) La matrice A è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.