MATEMATICA

2º Appello — 20 luglio 2023

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{3x-5}\right)$$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, il segno di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2. (a) Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$$

(b) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^4 \ln x \, \mathrm{d}x$$

(c) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{x} y = \sin x$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i punti $P = (0, 3, 1)$, $Q = (2, 1, 3)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

(a) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P e Q. Determinare se esiste un piano che contiene le rette r e s. Se tale piano esiste scrivere la sua equazione cartesiana.

(b) Determinare un punto P' tale che il segmento di estremi P e P' sia ortogonale alla retta r e la retta r intersechi tale segmento nel suo punto medio M.

(c) Sia π il piano di equazione $x + 2y - z = 0$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ parallelo a π e tale che $\mathrm{dist}(P, \sigma) = \mathrm{dist}(Q, \sigma)$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice A in $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il rango di A.

(b) Si determini una base per l'immagine della funzione lineare f_A associata ad A.

(c) La funzione f_A è iniettiva? Si giustifichi la risposta.

(d) Il vettore $v = (2, -2, 4, 2)$ appartiene all'immagine di f_A ? In caso affermativo si trovino tutti i vettori dell'immagine reciproca $f_A^{-1}(v)$.

Esercizio 5. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice A_α in $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quali valori di α la matrice A_α è invertibile.

(b) Si determini per quali valori di α la matrice A_α

1. ha due autovalori reali diversi;
2. ha un'unico autovalore reale;
3. non ha nessun autovalore reale.

(c) Analizzando ciascuno dei casi precedenti, si determini per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile sul campo dei numeri reali.

(d) Poniamo $\alpha = 5$ e consideriamo la matrice A_5. Si trovi una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A_5.