

MATEMATICA

3° Appello — 30 agosto 2023

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x-1}}$$

- (a) Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , il segno di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescita di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 2. (a) Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n + 2n}$$

(b) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} dx$$

(c) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$$

Esercizio 3. In \mathbb{R}^3 consideriamo i punti $A = (0, 0, -2)$, $B = (0, 2, 0)$ e il piano π di equazione $3x - y + z + 2 = 0$.

- (a) Scrivere le equazioni cartesiane della retta r passante per A e ortogonale al piano π .
- (b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per B , contenuta nel piano π e ortogonale alla retta passante per A e B .
- (c) Determinare la proiezione ortogonale del punto $P = (2, 0, 3)$ sul piano π e la distanza di P dal piano π .

Esercizio 4. Si consideri la matrice A_β in $M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & \beta & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcoli il rango di A_β al variare di β .
- (b) Si determini per quali valori di β il sistema

$$A_\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

ha soluzioni.

- (c) Per $\beta = 3$ si consideri la funzione lineare f_{A_3} associata ad A_3 . Si determini una base per l'immagine e una base per il nucleo di f_{A_3} . La funzione f_{A_3} è iniettiva? è suriettiva? (le risposte devono essere giustificate).

Esercizio 5. Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (4x + z, -2x + y, -2x + z).$$

- (a) Si scriva la matrice A che rappresenta la funzione f rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .
- (b) Si calcoli il determinante di A tramite lo sviluppo di Laplace.
- (c) Si dica se la matrice A è invertibile. Se lo è si determini la sua inversa.
- (d) Si calcolino gli autovalori di A .
- (e) La matrice A è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.