MATEMATICA (per Chimica e Chimica Industriale)

4° Appello — 20 settembre 2023

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x-2}{\ln(x-2)}$$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, il segno di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2. (a) Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\frac{1}{n}}{n^2+\frac{1}{n^2}}$$

(b) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(c) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' + x^2 y = x^2$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati il punto $P = (1, 2, -1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π passante per P e perpendicolare alla retta r.

(b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, incidente la retta r e perpendicolare al vettore $u = (1, -1, -1)$.

(c) Trovare la proiezione ortogonale del punto $A = (1, 3, 4)$ sul piano π trovato al punto (a) e calcolare la distanza di A dal piano π.

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (2x + 3y - z,\ -x - 2y + z,\ y - z,\ 2x + y + z).$$

(a) Si scriva la matrice A associata alla funzione f rispetto alle basi canoniche.

(b) Determinare una base del nucleo di f. La funzione f è iniettiva?

(c) Determinare il rango di A e una base dell'immagine di f. La funzione f è suriettiva?

(d) Determinare se il vettore $w = (1, 0, -1, 3)$ appartiene all'immagine di f. In caso affermativo determinare la controimmagine $f^{-1}(w)$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice A_β in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definita da

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 2 & \beta & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ \beta & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(ove } \beta \in \mathbb{R}\text{)}$$

(a) Determinare per quali valori di β la matrice A_β è invertibile.

(b) Per i valori di β trovati al punto (a) si calcoli la matrice inversa di A_β.

(c) Supponiamo ora $\beta \geq 0$.

1. Determinare gli autovalori di A_β, al variare di β.
2. Determinare **un** valore di β per il quale la matrice A_β sia diagonalizzabile (la risposta deve essere giustificata ed è sufficiente indicare **un solo** valore di β).
3. Determinare **un** valore di β per il quale la matrice A_β **NON** sia diagonalizzabile (la risposta deve essere giustificata ed è sufficiente indicare **un solo** valore di β).