

MATEMATICA

Esame completo — 26 gennaio 2024

Esercizio 1. Nello spazio \mathbb{R}^3 sono dati il punto $P = (1, 1, 1)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

- (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene la retta r e passa per P .
- (b) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P , contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r .
- (c) Sulla retta r trovare il punto H di minima distanza dal punto $A = (3, 3, 8)$.

Esercizio 2. Determinare se la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 3^n}{n!}$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x^2} e^{1/x}$$

- (a) Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , il segno di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescenza di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 4. (a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \cos(2x) dx$$

(b) Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$x^2 y' + 2y^2 = 0$$

che soddisfa la condizione $y(1) = -1/5$.

Esercizio 5. Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -4x_1 - x_2 + \alpha x_3 + 6x_4 \end{pmatrix}$$

ove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

- (a) Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- (b) Ridurre la matrice in forma a scala e determinare per quale valore di α il rango è 2.
- (c) Ora si ponga $\alpha = 0$ fino alla fine dell'esercizio. Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di f .
- (d) Determinare l'antiimmagine del vettore $(1, 2, 1)$.