

MATEMATICA

Esame completo — 12 febbraio 2024

Esercizio 1. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3(2x-1)^n}$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x^2+2}\right)$$

- Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , il segno di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescenza di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- Disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 3. (a) Calcolare il seguente integrale (suggerimento: porre $z = 1/x$):

$$\int \frac{1}{x^2} \cos^2(1/x) dx$$

(b) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' + y \sin(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

Esercizio 4. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da $u_1 = (1, 2, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0, 2)$, $u_3 = (1, 5, 2, -2)$, $u_4 = (2, 2, 2, 1)$.

- Verificare che i vettori u_1, u_2, u_3, u_4 sono linearmente dipendenti e scrivere uno di essi come combinazione lineare degli altri. Trovare una base di U .
- Trovare una base di un sottospazio vettoriale $L \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus L = \mathbb{R}^4$.
- Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_2 - x_3 = 0$. Trovare una base di W e una base di $U \cap W$.
- Trovare un vettore che sia ortogonale a tutti i vettori di W .

Esercizio 5. Dato $t \in \mathbb{R}$, sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(-2, 1, 0) = (0, -1, 2, -1), \quad f(1, -1, 0) = (-1, 0, t, 1), \quad f(1, 2, 1) = (1, -2, 5, -3).$$

- Scrivere la matrice di f rispetto alle basi canoniche.
- Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione e una base di $\text{Ker } f$ e di $\text{Im } f$.
- Determinare per quale valore di t la funzione f **non** è iniettiva.
- Per il valore di t trovato al punto (c) determinare l'antiimmagine del vettore $(0, -1, 2, -1)$.