MATEMATICA (per Chimica e Chimica Industriale)

3º Appello — 28 agosto 2024

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{|2x|+1}\right)$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, il segno di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

(c) Si dica se la funzione f è continua in $x = 0$ e se è derivabile in $x = 0$.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2. (a) Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,dx$$

(si usi la sostituzione $x - 1 = y^2$).

(b) Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2$$

che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = -1$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il piano

$$\pi_\alpha : 5\alpha x + \alpha y + 4z = 0, \quad \text{e la retta} \quad r_\alpha : \begin{cases} 2x + \alpha z - 2 = 0 \\ 3x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare i valori di α per cui r_α e π_α sono incidenti.

(b) Per quali valori di α la retta r_α è parallela al piano π_α? Per quali valori di α la retta r_α è perpendicolare al piano π_α?

(c) Dopo aver posto $\alpha = 1$, determinare le equazioni parametriche della retta s passante per il punto $A = (1, -4, 0)$, parallela al piano π_α e ortogonale alla retta r_α.

Esercizio 4. Si consideri la matrice A_k in $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ definita da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & k \\ 2 & 3 & 4 & k \end{pmatrix}$$

(a) Si calcoli il determinante di A_k, al variare di k.

(b) Si determini per quali valori di k la matrice A_k è invertibile.

(c) Si determini per quali valori di k la funzione lineare f_{A_k} associata alla matrice A_k è suriettiva. Perché?

(d) Si consideri $k = 3$ e la matrice A_3. Sia V l'immagine della funzione lineare f_{A_3}.

1. Si determini una base di V.

2. Si determini una base per un complemento di V in $\mathbb{R}^4$.
3. Si determini per quali valori di α il sistema

$$A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ha soluzione.

Esercizio 5. Si consideri la seguente matrice nel campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si determini se A è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.