

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x^2 - x + 1}\right)$$

- Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , il segno di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescita di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- Disegnare un grafico qualitativo di f .
- Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x = 1$.

Esercizio 2. (a) Calcolare il seguente integrale indefinito (*suggerimento*: usare la sostituzione $1 + \sqrt{x} = y$)

$$\int \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

(b) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{y}{x+2} = 2$$

Esercizio 3. In \mathbb{R}^3 sono date le due rette

$$r : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

- Determinare se r e s sono incidenti, parallele o sghembe.
- Dato il punto $R = (1, -1, 0) \in r$ trovare il punto $S \in s$ tale che la retta passante per R e S sia ortogonale a r e a s .
- Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ contenente la retta r e passante per il punto $A = (0, -3, -1)$.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio $W = \langle (1, 1, 2, -1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 4, -2) \rangle$ di \mathbb{R}^4 .

- Si trovi una base per W .
- Si trovi una base per un complemento di W in \mathbb{R}^4 .

Esercizio 5. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -8 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare autovalori e autovettori di A .
- (b) Dire se la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 6. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x e^{y^2 - x^2}$$

- (a) Si calcolino le derivate parziali di f , il suo vettore gradiente e i punti stazionari di f .
- (b) Si calcoli la matrice Hessiana di f .
- (c) Per ogni punto stazionario, si determini se si tratta di un massimo locale, minimo locale o punto di sella.