MATEMATICA

2$^{\text{o}}$ Appello — 18 luglio 2024

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = x^2\, e^{\frac{2}{x-2}}$$

(a) Determinare il dominio D di f, eventuali simmetrie di f, il segno di f, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2. (a) Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{n/2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

(b) Calcolare il seguente integrale indefinito (usare la sostituzione $1 - \frac{2}{x} = y$):

$$\int \frac{1}{x^2} \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x$$

(c) Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$4y'' + 4y' + y = 0$$

che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 4$ e $y'(0) = 0$.

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sono assegnati i punti $A = (-2, 4, -1)$, $B = (1, -1, 1)$ e il piano π : $2x - 2y + z = 5$.

(a) Sia C la proiezione ortogonale di A sul piano π. Determinare le coordinate del punto C. Verificare che $B \in \pi$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta per A e B.

(d) Determinare il valore del parametro t affinché la retta $r_t : \begin{cases} t\,x - y + 3 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ sia parallela al piano π.

Esercizio 4. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z, t) = (3x - y + z - 2t, y + 5z - t, -x - 2z + t).$$

(a) Si scriva la matrice A associata alla funzione f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si calcoli il rango di A.

(c) La funzione f è suriettiva? Si giustifichi la risposta.

(d) Quante soluzioni ha il sistema $f(x, y, z, t) = (2, 3, -1)$? Si giustifichi la risposta.

(e) I vettori colonna di A generano $\mathbb{R}^3$? In caso negativo, si trovi un complemento di $\mathsf{Im}(f)$ in $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si consideri la matrice A_α in $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definita da

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizzando lo sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante, si determinino gli autovalori di A_α, al variare di α.

(b) Per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile? Si giustifichi la risposta.

(c) Si consideri $\alpha = 0$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A_0? In caso affermativo si trovi una tale base.