MATEMATICA (per Chimica e Chimica Industriale)

18 settembre 2024

Esercizio 1. Sia a un numero reale > 0 e sia f la funzione definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x > 0 \\ -x\,\ln(a-x) & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Calcolare i limiti di f a $-\infty$ e a $+\infty$ e determinare eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) di f.

(b) Verificare che f è continua in $x = 0$ per ogni $a > 0$.

(c) Calcolare la derivata di f per $x > 0$ e per $x < 0$. Determinare per quale valore di a la derivata di f è continua in $x = 0$.

Esercizio 2. (a) Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{3\,(x+3)^n}$$

(b) Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra i grafici delle due funzioni seguenti:

$$f(x) = 2x - x^2, \qquad g(x) = 3x^2 - 6x$$

(c) Determinare la soluzione generale $y(x)$ dell'equazione differenziale

$$x\,y' + (x+1)\,y = 1$$

Esercizio 3. In $\mathbb{R}^3$ sono dati il punto $P = (1, 2, 2)$ e la retta r di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + z - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π contenente r e P.

(b) Sia σ il piano di equazione $2x + z - 2 = 0$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s ottenuta intersecando i piani π e σ.

(c) Sia H la proiezione ortogonale di $A = (3, 2, 6)$ sul piano σ. Trovare le coordinate di H e poi trovare un punto B tale che H sia un punto interno del segmento AB e $\mathrm{dist}(B, H) = 2\,\mathrm{dist}(A, H)$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x - z,\ x + 2y + z,\ y - z).$$

(a) Si trovi la matrice A associata alla funzione f rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio.

(b) Si usi un sviluppo di Laplace per calcolare il determinante di A.

(c) La funzione f è invertibile? In caso affermativo, si trovi la funzione inversa.

(d) Il vettore $(1,1,1)$ appartiene all'immagine di f? In caso affermativo si determini la sua controimmagine.

Esercizio 5. Per ogni parametro reale k, si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Si determini il rango di A_k al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(b) Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile nel campo dei numeri reali.