

MATEMATICA

2° appello — 11 febbraio 2025

Esercizio 1. In \mathbb{R}^3 sono dati i punti $A = (0, 1, -1)$, $B = (2, 2, 1)$ e $C = (1, 3, 0)$.

- (a) Determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per A , B e C .
- (b) Determinare la proiezione ortogonale di $D = (6, 3, 1)$ sul piano π .
- (c) Determinare la distanza di C dalla retta r passante per A e B .

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1} e^{1/x}$$

- (a) Determinare il dominio D di f , eventuali simmetrie di f , il segno di f , i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f .
- (b) Calcolare la derivata di f , studiare la crescita e decrescita di f , determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f .
- (c) Disegnare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 3. (a) Calcolare il seguente integrale generalizzato:

$$\int_{-\infty}^0 x^2 e^{x+1} dx$$

(b) Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = 5e^{2x+1}$$

Esercizio 4. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -5 & \alpha \end{pmatrix}$$

- (a) Ridurre A in forma a scala e determinare il rango in funzione del valore di α .
- (b) Per quali valori di α la matrice A è invertibile?
- (c) Scegliamo ora un valore di α tale che A abbia rango 3. Determinare per quale valore di β il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

ha soluzioni e trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 5. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una funzione lineare tale che

$$f(1, -1, 0) = (3, -2, -3, -4), \quad f(0, 1, 1) = (-1, -2, 5, 0), \quad f(1, 1, 0) = (-1, 2, -1, 2).$$

- (a) Scrivere la matrice di f nelle basi canoniche del dominio e del codominio.
- (b) Trovare la dimensione e una base di $\text{Im } f$ e di $\text{Ker } f$.
- (c) Dire per quale valore di α si ha $(-5, 6, 1, \alpha) \in \text{Im } f$.
- (d) Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni lineari da \mathbb{R}^3 in \mathbb{R}^3 e sia U il sottospazio vettoriale di V definito da

$$U = \{g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f \circ g = 0\}.$$

Trovare la dimensione e una base di U .