MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

1$^{\text{o}}$ Appello — 24 giugno 2025

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x-1}$$

(a) Determinare il dominio D, il segno, le eventuali simmetrie, i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti di f.

(b) Calcolare la derivata di f, studiare la crescenza e descrescenza di f, determinare gli eventuali punti di massimo o minimo di f (*non è richiesto lo studio della derivata seconda*).

(c) Tracciare il grafico di f utilizzando le informazioni raccolte.

Esercizio 2. (a) Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + 5\sin(x)}{2x}$$

(b) Determinare se la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + e^n}{n!}$$

Esercizio 3. (a) Calcolare il seguente integrale generalizzato:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$$

(b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right) y - x$$

e trovare quella che verifica la condizione $y(1) = 1 + e$.

Esercizio 4. Sia s un parametro reale e si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$W_s = \langle (1,1,1,0), (-2,s,6,-5), (-1,1,7,-5) \rangle$$

(a) Si trovi una base per W_s, al variare di s.

(b) Per ogni scelta di s, si trovi un complemento di W_s in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Si consideri il sistema di equazioni a coefficienti reali

$$\begin{cases} 2x - y + t = 3 \\ 2z - t = 0 \\ 3x - z = 2 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

(a) Si determini la matrice completa $(\,A\,|\,b\,)$ associata al sistema di equazioni, dove A è la matrice dei coefficienti e b è il vettore colonna dei termini noti.

(b) Si usi il teorema di Rouché–Capelli per determinare il numero di soluzioni del sistema.

(c) Considerando soltanto la matrice A e la funzione lineare associata φ_A, si determinino:

1. una base per il sottospazio generato dalle righe di A;
2. una base per il nucleo $N(\varphi_A)$;
3. una base per l'immagine $\mathsf{Im}(\varphi_A)$;
4. se la funzione lineare è iniettiva e/o suriettiva e perché;
5. se il vettore $(3, 0, -2, 0)$ appartiene all'immagine di φ_A e perché.

Esercizio 6. Si consideri la seguente matrice diagonalizzabile che ha tre autovalori diversi: 3, 4 e un altro.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Si consideri la funzione lineare φ_M associata a M. Si calcoli $\varphi_M(1, 2, 1)$.

(b) Qual'è il terzo autovalore di M? (giustificare la risposta).

(c) Si trovi una base $\mathcal{B}$ e una matrice di cambio di base $S := {}_{\mathsf{can}}A_{\mathcal{B}}$ per cui il prodotto $S^{-1}\,M\,S$ sia una matrice diagonale.