

**Esercizio 1.**

(a) Calcolare il seguente limite:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 7} - \sqrt{n^2 - n - 6}}{5n - 2}$

(b) Determinare se la seguente serie converge:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - |\cos(n)|}{\sqrt{n^4 + 3n^3 - 2n^2 + n + 1}}$

**Esercizio 2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{1 + x^3}$$

determinandone dominio  $D$ , segno, simmetrie, limiti agli estremi di  $D$ , asintoti verticali, orizzontali ed obliqui, derivate prima e seconda, crescita, decrescenza, concavità, massimi, minimi e flessi.

Tracciare il grafico della funzione  $f(x)$  utilizzando le informazioni raccolte.

**Esercizio 3.**

(a) Calcolare il seguente integrale generalizzato:  $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ .

(b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x}\right)y - e^x$$

e trovare quella che verifica la condizione  $y(1) = 2e$ .

**Esercizio 4.** Si considerino i due seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ , formati dalle soluzioni delle rispettive equazioni cartesiane.

$$V: \begin{cases} x + z - 2t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} \quad W: \begin{cases} y + t = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Si trovino basi per:

(a)  $V \cap W$ ,

(b)  $V + W$ .

**Esercizio 5.** Sia  $w$  un parametro reale e si consideri la seguente matrice  $4 \times 4$  a coefficienti reali:

$$A_w = \begin{pmatrix} w & 0 & -1 & 2 \\ w & 4 & 3 & 4 \\ w & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Si determini il rango di  $A_w$  al variare di  $w$ .
- (b) Per quali valori di  $w$  la matrice  $A_w$  è invertibile? Perché?
- (c) Si determini una base per l'immagine della funzione lineare associata, al variare di  $w$ .
- (d) Si determini una base per il nucleo della funzione lineare associata, al variare di  $w$ .

**Esercizio 6.** Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcoli il determinante di  $A$ . La matrice  $A$  è invertibile? Perché?
- (b) Si determini la matrice inversa di  $A$  e si proceda con la verifica che il risultato trovato è corretto.
- (c) Si determinino gli autovalori di  $A$ .
- (d) Si determinino basi per tutti gli autospazi di  $A$ .
- (e) La matrice  $A$  è diagonalizzabile? Perché?