MATEMATICA (Chimica e Chimica Industriale)

4^{o} Appello — 17 settembre 2025

Esercizio 1.

(a) Calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} e^{-n^2}(n^2-2n+3)$.

(b) Determinare se la seguente serie converge: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$.

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

determinandone dominio D, segno, simmetrie, limiti agli estremi di D, asintoti verticali, orizzontali ed obliqui, derivate prima e seconda, crescenza, decrescenza, concavità, eventuali massimi, minimi e flessi.
Tracciare il grafico della funzione $f(x)$ utilizzando le informazioni raccolte.

Esercizio 3.

(a) Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Scrivere tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = x\,y(x) - x.$$

Trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 3$.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$$

(a) Si trovi una base per W.

(b) Si trovi una base per un complemento di W in $\mathbb{R}^3$.

(c) Si consideri il sottospazio $V = \langle(1,1,2),(-5,5,0)\rangle$. Si determini una base di $V+W$.

Continua sul retro del foglio

Esercizio 5. Si consideri la matrice A con entrate in $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare delle basi per i seguenti spazi vettoriali:

(i) $R(A)$, lo spazio generato dalle righe di A;

(ii) $C(A)$, lo spazio generato dalle colonne di A;

(iii) $N(A)$, il nucleo di A.

(b) Si indichi, giustificando la risposta, se la funzione lineare associata ad A è iniettiva e/o suriettiva.

(c) Supponiamo adesso che la matrice A sia la matrice completa di un sistema di tre equazioni in tre incognite.

(i) Si usi il Teorema di Rouché–Capelli per determinare il numero di soluzioni del sistema di equazioni.

(ii) Si trovino tutte le soluzioni del sistema.

Esercizio 6. Si consideri la seguente matrice con entrate in $\mathbb{R}$, dipendente da un parametro reale k:

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & k \end{pmatrix}$$

(a) Si determini per quali valori di k la matrice è invertibile.

(b) Per $k = 0$ si sa che il polinomio caratteristico di A_0 è $p_{A_0}(\lambda) = (-\lambda + 1)(\lambda^2 - 5)$.

(i) Si determini una base per ogni autospazio di A.

(ii) La matrice A è diagonalizzabile? Perché? In caso affermativo, si trovi una matrice S tale che il prodotto $S^{-1}AS$ sia una matrice diagonale.