MATEMATICA (Scienza dei Materiali)

1^{o} appello — 23 gennaio 2026

Esercizio 1. (a) Sia $a > 1$ e consideriamo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n + n^a}{n!}$. Determinare se questa serie converge o diverge.

(b) Ricordiamo che la serie di termine generale $\dfrac{1}{n!}$ converge e si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Dimostrare che anche la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}$ converge e calcolare la sua somma.

Esercizio 2. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

(a) Si determini il dominio D di f, il suo segno ed eventuali asintoti orizzontali e verticali.

(b) Calcolare la derivata prima, studiare la crescenza e decrescenza di f e determinare gli eventuali punti di massimo o minimo.

(c) Calcolare la derivata seconda di f, studiare la concavità e determinare gli eventuali punti di flesso.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nei punti $x = 1$ e $x = 2$.

Esercizio 3. (a) Calcolare i seguenti due integrali, indefinito e generalizzato:

$$\int x^2 \ln(x)\, \mathrm{d}x \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+2}}\, \mathrm{d}x$$

(b) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \sqrt{x}y = \sqrt{x}$

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_4,\ -4x_2 + x_3 + 2x_4,\ -2x_1 - x_3,\ x_1 + 2x_2 - x_4).$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$, ridurla in forma a scala e trovare il rango.

(b) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$, una base di $\operatorname{Im} f$ e dire per quale valore di α il vettore $(1, 1, -3, \alpha)$ appartiene a $\operatorname{Im} f$.

(c) Verificare che la prima colonna c_1 di A appartiene a $\operatorname{Ker} f$. Possiamo dire che $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$? Perché?

Esercizio 5. Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

ove a è un parametro reale.

(a) Usando la formula di Laplace, calcolare il determinante di A.

(b) Determinare per quali valori di a la matrice è invertibile.