

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^3$  sono assegnati il piano  $\pi$  di equazione  $2x - y - 3z = -2$  e la retta  $\ell$  di equazioni

$$\ell : \begin{cases} x - \alpha z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

- (a) Determinare per quale valore di  $\alpha$  la retta  $\ell$  è parallela al piano  $\pi$ .
- (b) Per il valore di  $\alpha$  trovato al punto (a) calcolare la distanza di  $\ell$  da  $\pi$ .

**Esercizio 2.** (a) Determinare una primitiva della funzione  $g(x) = \frac{\ln x}{x^{n+1}}$ , ove  $n$  è un numero intero  $\geq 1$ . (*suggerimento*: usare il cambiamento di variabili  $z = \ln x$  e successivamente integrare per parti).

(b) Calcolare l'area compresa tra l'asse delle  $X$  e il grafico di  $g(x)$ , per  $x \in [1, +\infty)$ .

**Esercizio 3.** Consideriamo la funzione  $f(x) = x e^{-ax^2+b}$ , ove  $a$  e  $b$  sono due costanti.

- (a) Determinare i valori di  $a$  e  $b$  in modo che la funzione abbia un punto di massimo in  $x = 1$  e sia  $f(1) = 1$ .
- (b) Per i valori di  $a$  e  $b$  trovati al punto (a), tracciare un grafico qualitativo di  $f$  per  $x \geq 0$ , determinando dove  $f$  è crescente e dove è decrescente.
- (c) Determinare concavità, convessità e punti di flesso di  $f$  per  $x > 0$ .
- (d) Determinare l'area della regione di piano compresa tra l'asse  $X$  e il grafico di  $f$ , per  $x \geq 0$ .

**Esercizio 4.** Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = e^{-2x} y^2$$

- (a) Determinare la soluzione generale  $y(x)$ .
- (b) Determinare la soluzione particolare che soddisfa la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 3.$$

**Esercizio 5.** Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) Ridurre  $A$  in forma a scala, determinare basi di  $\text{Ker } f$  e di  $\text{Im } f$ .
- (b) Dire per quale valore di  $\alpha$  il vettore  $(2, \alpha, 1, 3)$  appartiene al nucleo di  $f$ .
- (c) Dato  $w_\beta = (-1, 2, \beta)$ , determinare per quale valore di  $\beta$  è  $f^{-1}(w_\beta) \neq \emptyset$ .

**Esercizio 6.** Si determini, giustificando, se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo, si trovi una base di  $\mathbb{R}^3$  formata da autovettori di  $A$ .