

## Esercizi per il corso di MATEMATICA

Corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriali

### Foglio 14

27 maggio 2026

Gli esercizi segnati con asterisco sono estratti/adattati dal libro di F. Bottacin, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria*, Società Editrice Esculapio (2021)

1. Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4x + y + z + t = 6 \\ 3x + 7y - z + t = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8t = -3 \\ x + y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

- Si scriva il sistema in forma matriciale, cioè, nella forma  $Ax = b$  per una matrice  $A$  e un vettore di termini noti  $b$  e si giustifichi l'esistenza di un'unica soluzione.
- Si determini la seconda coordinata della soluzione senza risolvere il sistema.
- Si risolva il sistema usando il Teorema di Cramer.

2. \*\* Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Si confermi che gli autovalori di  $A$  sono 1 e 5.
- Si confermi che gli autovalori di  $V$  sono 1, 2 e 3.
- Si confermi che 4 è un autovalore di  $C$ .

3. \*\* Si trovino gli autovalori delle seguenti matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Si dica se la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale  $D$  ed una matrice di cambio di base  $S$  tali che  $SAS^{-1} = D$ .

5. \* Si determini  $t \in \mathbb{R}$  in modo tale che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & t-1 & -3 \end{pmatrix}$$

abbia  $-7$  come autovalore. Per tale valore di  $t$  si determinino gli autovalori e gli autospazi di  $A$  e si stabilisca se  $A$  è diagonalizzabile.

6. Si dimostri che una matrice diagonalizzabile non è invertibile se e solo se 0 è un autovalore.

7. Si dica se ognuna delle seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. In caso affermativo, si determinino una matrice diagonale  $D$  ed una matrice di cambio di base  $S$  tali che  $SAS^{-1} = D$  (oppure tali che  $SBS^{-1} = D$ ).

8. **(La potenza di una matrice diagonalizzabile).** Sia  $A$  una matrice  $n \times n$  su  $\mathbb{R}$  e supponiamo che  $A$  è diagonalizzabile e che  $\mathcal{B}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$  fatta di autovettori di  $A$ . Consideriamo le matrici di cambio di base  ${}_B A_{\text{can}}$  e  ${}_{\text{can}} A_B$  che, ricordiamo, sono inverse una dall'altra. Sia  $D$  la matrice diagonale ottenuta dal prodotto  ${}_B A_{\text{can}} \cdot A \cdot {}_{\text{can}} A_B$ .

- Se le entrate nella diagonale di  $D$  sono  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , si calcoli la matrice  $D^2$ .
- Si determini le entrate della matrice  $D^k$  for ogni  $k \geq 1$ .
- Si scriva  $A$  come un cambio di base della matrice  $D$ .
- Si usi la formula precedente per calcolare  $A^2$  come un cambio di base della matrice  $D^2$ .
- Si usi la formula precedente per calcolare  $A^k$  come un cambio di base della matrice  $D^k$  per ogni  $k \geq 1$ .

9. Si calcoli  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{11}$ .

10. Entrambe le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 5 & -11 & -6 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 9 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

hanno polinomio caratteristico  $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = -(\lambda + 2)^2(\lambda + 3)$ . Sapendo questo, si determini se sono diagonalizzabili. In caso affermativo, si determinino (per ognuno di loro) una matrice diagonale  $D$  ed una matrice di cambio di base  $S$  tali che  $SAS^{-1} = D$  (oppure tali che  $SBS^{-1} = D$ ).

11. **(Una matrice diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$  ma non su  $\mathbb{R}$ ).** Si consideri la matrice associata alla rotazione di  $\pi/2$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo discusso in lezione che tale matrice non può avere autovettori reali, cioè, un vettore non-nullo in  $\mathbb{R}^2$  non viene mai riscalato da questa matrice.

- Si calcoli il polinomio caratteristico di  $A$  e di dimostri che non ci sono radici reali (cioè, non ci sono autovalori reali).
- Supponiamo adesso che la matrice  $A$  è una matrice su  $\mathbb{C}$ , cioè, rappresenta una funzione lineare  $\varphi_A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  (che invia un vettore  $v$  in  $\mathbb{C}^2$  nel vettore  $Av$  in  $\mathbb{C}^2$ ). Il suo polinomio caratteristico è lo stesso di prima, considerando però  $\lambda$  come una variabile complessa.
  - Il polinomio caratteristico ha radici complesse? Questi sono autovalori complessi, se ci sono!
  - Si trovino gli autospazi associati agli autovalori ottenuti.
  - La matrice  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$ ?

12. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

- La matrice  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ ? In caso affermativo, si determinino (per ognuno di loro) una matrice diagonale  $D$  ed una matrice di cambio di base  $S$  tali che  $SAS^{-1} = D$ .
- La matrice  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$ ? In caso affermativo, si determinino (per ognuno di loro) una matrice diagonale  $D$  ed una matrice di cambio di base  $S$  tali che  $SAS^{-1} = D$ .