27/05/2026

$f : V \longrightarrow V$ lineare, V spazio vettoriale di dimensione n sul $\mathbb{k}$.

Esiste una base $\mathcal{B}$ di V per cui ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale?

Definizione.
- $\lambda \in \mathbb{k}$ si dice un autovalore di f se esiste $v \neq 0$ per cui $f(v) = \lambda v$.
- Per ogni autovalore λ di f, un vettore v si dice un autovettore associato a λ se $f(v) = \lambda v$

Come determinare autovalori e autovettori?

Passo 1 Scegliere una base $\mathcal{C}$ di V e scrivere ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(f)$.

Passo 2 Tradurre la definizione di autovalore e autovettore in linguaggio matriciale. Cosa vuole dire che λ è un autovalore di f? Si ha un vettore $v \neq 0$ per cui $f(v) = \lambda v$. Scriviamo v in coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$, cioè

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} \qquad f(v) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Però, ho anche $f(v) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$

Quindi ottengo $${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(f) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Quindi il nostro problema viene tradotto in trovare $\lambda \in \mathbb{k}$ e vettori colonna x per cui il prodotto di una matrice quadrata A $n\times n$ per X ci da λX, ovvero:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Data la matrice } A \ n\times n \\ \text{Chi sono i valori di } \lambda \text{ e i vettori } x \text{ per cui} \\ Ax = \lambda x\ ?\end{array}}$$

$$Ax = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0 \iff Ax - (\lambda I_n)x = 0$$

Attenzione $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \ddots \ \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda I_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\iff (A - \lambda I_n)x = 0$$

Se λ è un autovalore, ovvero $Ax = \lambda x$ per un certo $x \neq 0$, allora il sistema omogeneo $(A - \lambda I_n)x = 0$ ha infinite soluzioni (non solo la soluzione nulla ma anche almeno una – e quindi infinite – soluzioni non-nulle). Siccome $(A - \lambda I_n)x = 0$ non ha un'unica soluzione (ma più di una!) allora $A - \lambda I_n$ non è invertibile. Allora si ha che λ è autovalore di A se e solo se $\boxed{\det(A - \lambda I_n) = 0}$

Arriviamo alla seguente definizione:

Definizione: A matrice $n \times n$ su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$).

$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ è detto il polinomio caratteristico di A.

Da quello che abbiamo visto, le radici del polinomio caratteristico saranno precisamente gli autovalori di A.

Esempio $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ già diagonale.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= (a-\lambda)(b-\lambda)$$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \underbrace{\lambda = a \vee \lambda = b}_{\text{autovalori di } A}.$$

Lo sapevamo già perchè $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

$= a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ a è autovalore e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore associato ad a.

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allora b è autovalore e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore associato a b.

Esempio: A matrice di rotazione in $\mathbb{R}^2$ per $\pi/3$

$$\underbrace{\text{matrice di rotazione}}_{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & -\sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & \cos \pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

polinomio caratteristico:

$$P_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1/2 - \lambda & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \lambda + \lambda^2 + \frac{3}{4} =$$

$$= \lambda^2 - \lambda + 1$$

radici del polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.1}}{2}$$

non ci sono radici reali.

Allora non ci sono autovalori per A!

Lo sapevamo già perchè una rotazione di $\pi/3$ non riscala nessun vettore non-nullo.

<u>Esempio</u> matrice di rotazione di angolo π

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A \text{ è diagonale, } -1 \text{ è autovalore di } A.$$

Entrambi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono autovettori associati al autovalore -1.

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ autovalori di A?

polinomio caratteristico: $P_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{2+2} \cdot (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

sviluppo di Laplace lungo riga 2

$$= (3-\lambda)\Big((2-\lambda)(1-\lambda) - 2\Big)$$

$$= (3-\lambda)\left(2 - 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 2\right)$$

$$= (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda\right) = (3-\lambda)\,\lambda\,(\lambda-3)$$

$$P_A(\lambda) = 0 \iff 3-\lambda = 0 \lor \lambda = 0 \lor \lambda - 3 = 0$$

$$\iff \lambda = 3 \lor \lambda = 0 \lor \lambda = 3.$$

Quindi 0 e 3 sono autovalori di A.

Una volta calcolato un autovalore λ di una matrice A, come calcolare gli autovettori associati a λ?

Se λ è un autovalore di A, gli autovettori associati a λ sono tutti i vettori v per cui

$$Av = \lambda v.$$

$$\iff Av - \lambda v = 0$$

$$\iff (A - \lambda I_n) v = 0$$

Quindi si ha che gli autovettori associati ad un autovalore λ sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$(A - \lambda I_n) x = 0.$$

Siccome questo sistema è omogeneo, le soluzioni costituiscono un sottospazio di $\mathbb{K}^n$, e questo sottospazio si dice l'autospazio associato a λ e scriviamo $E_A(\lambda)$.

Attenzione: Se λ è un autovalore $E_A(\lambda) \neq \{0\}$, per definizione di autovalore.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ autovalori: $3, 0$

$E_A(3)$: $(A - 3I_3)x = 0$ $A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

matrice completa del sistema omogeneo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

x, y dominanti $\quad z$ libera

Mettendo $z = 1$, abbiamo $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Una base per lo spazio delle soluzioni è $\{(2,0,1)\}$

Allora $E_A(3) = \langle (2,0,1) \rangle$

$E_A(0)$: $\quad (A - 0I_3)X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$

matrice completa $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z variabile libera

Base per $E_A(0)$: Mettendo $z=1$

$$\begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$E_A(0) = \langle(-1,0,1)\rangle$$

Verifica

$$A\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&2\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

$$A\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&2\\0&3&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \checkmark$$

Si osservi che per questa matrice A non si riuscirà a trovare una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori poichè ci sono soltanto al massimo due autovettori l.i.

Definizione A matrice $n\times n$ su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).
Prendiamo $p_A(\lambda)$ il polinomio caratteristico di A.
Supponiamo λ_0 è una radice del polinomio caratteristico (ovvero un'autovalore di A).

(1) la molteplicità algebrica di λ_0 (scriviamo $m_a(\lambda_0)$) è la molteplicità di λ_0 come radici del polinomio $p_A(\lambda)$, ovvero il numero di volte per cui λ_0 compare come radice di $p_A(\lambda)$. Rigorosamente, la molteplicità algebrica è il numero $m_a(\lambda)$ per cui

$$p_A(\lambda) = (x-\lambda_0)^{m_a(\lambda)}\cdot f(\lambda) \quad \text{dove } f(\lambda_0)\neq 0$$

(2) la **molteplicità geometrica** di λ_0 (scriviamo $m_g(\lambda_0)$) è la dimensione dell'autospazio $E_A(\lambda_0)$.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

autovalori	3	0
m_a	2	1
m_g	1	1

$$P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-3)^2$$

$$E_A(3) = \langle (2,0,1) \rangle$$

$$E_A(0) = \langle (-1,0,1) \rangle$$

Teorema Sia A una matrice $n \times n$ su $\mathbb{K}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) Esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ fatta di autovettori di A.

(2) La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è uguale a n.

(3) Per ogni autovalore λ, si ha $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$

(4) Esiste una matrice S invertibile per cui SAS^{-1} è una matrice diagonale.

Dimostrazione parziale: Partendo dalla affermazione (2), dimostriamo (1), ovvero dimostriamo che prendendo l'unione di basi degli autospazi otteniamo una base di $\mathbb{k}^n$. Il numero di vettori è, per ipotesi, corretto: è uguale a n. Manca vedere che questi vettori sono l.i.

Prendiamo, per esempio, $v \neq 0$ e $w \neq 0$ autovettori associati a due autovalori diversi, diciamo λ e μ rispettivamente. Vediamo che v e w sono l.i.

$$\alpha v + \beta w = 0$$

$$A(\alpha v + \beta w) = A \cdot 0 = 0$$

$$\alpha (Av) + \beta (Aw) = 0$$ poiché moltiplicare per A è una operazione lineare

$$\alpha \cdot (\lambda v) + \beta (\mu w) = 0$$ poichè $v \in E_A(\lambda)$ e $w \in E_A(\mu)$

Questo ci da
$$\begin{cases} \alpha v + \beta w = 0 \rightsquigarrow \alpha v = -\beta w \\ \alpha \lambda v + \beta \mu w = 0 \end{cases}$$

sostituendo nella seconda equazione ottengo

$$\lambda(-\beta w) + \mu(\beta w) = 0$$

$$\underbrace{\beta}\underbrace{w}_{\substack{w \neq 0 \\ \text{per ipotesi}}} (\underbrace{\mu - \lambda}_{\neq 0 \text{ poiché } \mu \text{ e } \lambda \text{ erano autovalori diversi per ipotesi}}) = 0$$

$$\Longrightarrow \beta = 0 \Longrightarrow \alpha v = 0 \Longrightarrow \alpha = 0.$$

Allora v e w sono l.i.

Supponiamo adesso che B è una base fatta di autovettori. Supponiamo che $A = {}_{Can}M_{Can}(f)$ ovvero $f(a_1, \dots, a_n) = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Cambiando dalla base canonica alla base B, so che

$$\underbrace{{}_B M_B (f)}_{\text{diagonale}} = {}_B A_{can} \cdot \underset{\substack{\| \\ {}_{can}M_{can}(f)}}{A} \cdot {}_{can}A_B \rightarrow S^{-1}$$

$${}_B A_{can} \rightarrow S$$

$${}_B M_B (f) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_B$$

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$ perché v_1 è autovettore

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\boxtimes$

Definizione: Una matrice A che soddisfa le condizioni del teorema si dice *diagonalizzabile*.

Osservazione ⚠ Se una matrice A $n\times n$ ha n autovalori diversi, allora la molteplicità geometrica di ognuno di loro deve per forza essere uguale a 1 e quindi la loro somma è n. Quindi in tale caso, la matrice è diagonalizzabile!

Esempio La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile poichè $m_g(3) + m_g(0) = 2 \neq 3$ oppure $m_a(3) \neq m_g(3)$.

Esempio: Si consideri la funzione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y,z) = (y+z,\ x+z,\ x+y)$$

a) Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di f?

b) Sia $A = {}_{Can}M_{Can}(f)$. Si trovi una matrice S tale che SAS^{-1} sia diagonale (se tale matrice esiste).

a) Cominciamo calcolando $\underset{\displaystyle\overset{\shortparallel}{A}}{}\ {}_{Can}M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

La domanda è equivalente a sapere se la matrice è diagonalizzabile.

$$p_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)$$

polinomio caratteristico

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot(-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sviluppo lungo riga 1

$$= -\lambda(\lambda^2-1) - (-\lambda-1) + (1+\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) + (\lambda+1) + (\lambda+1)$$

$$= (\lambda+1)\left(-\lambda(\lambda-1) + 1 + 1\right)$$

$$= (\lambda+1)\left(-\lambda^2+\lambda+2\right)$$

$p_A(\lambda)=0 \iff$

$\iff \lambda+1=0 \lor -\lambda^2+\lambda+2=0$

$\iff \lambda=-1 \lor \lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{-2}$

$\iff \lambda=-1 \lor \lambda=2 \lor \lambda=-1$

Osservazione: Posso usare eliminazione Gaussiana per calcolare questo determinante, tenendo in conto però come viene cambiato il determinante dalle operazioni elementari!

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 + \lambda R_3} \begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

operazioni del terzo tipo non cambiano il determinante, e quindi

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{lungo colonna } 1}{=} (-1)^{3+1}\cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1+\lambda & 1-\lambda^2 \\ -\lambda-1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1+\lambda)(1+\lambda) - (1-\lambda^2)(-\lambda-1)$$

$$= (1+\lambda)^2 + (\lambda+1)(1-\lambda^2)$$

$$= (\lambda+1)\big((1+\lambda) + (1-\lambda^2)\big)$$

$$= (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2)$$

Autovalori: -1 e 2

$m_a(-1) = 2$

$m_a(2) = 1$

Autospazi: $E_A(-1)$: $(A-(-1)I_3)X = 0$ $(*)$

$E_A(2)$: $(A-2I_3)X = 0$ $(**)$

$(*)$ $(A+I_3)x=0$ $\rightsquigarrow$ matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y e z variabili libere!

Base di $E_A(-1)$:

$y=1,\ z=0 \rightsquigarrow x+1+0=0 \rightsquigarrow x=-1$ $\quad (-1,1,0)$

$y=0,\ z=1 \rightsquigarrow x+0+1=0 \rightsquigarrow x=-1$ $\quad (-1,0,1)$

$mg(-1)=2$

$$E_A(-1)=\langle(-1,1,0),\ (-1,0,1)\rangle$$

$(**)$ $(A-2I_3)x=0$ $\rightsquigarrow$ matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3+2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z variabile libera

Base di $E_A(2)$

$$z=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ y-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$E_A(2)=\langle(1,1,1)\rangle$. $\quad mg(2)=1$

Siccome $mg(-1)+mg(2)=2+1=3$ allora la matrice

A è diagonalizzabile e quindi esiste una base fatta di autovettori:

$$\mathcal{B} = \{(-1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$$

b) Dalla dimostrazione parziale del teorema la matrice S che cerchiamo è ${}_{\mathcal{B}}A_{Can} = \left({}_{Can}A_{\mathcal{B}}\right)^{-1}$

$${}_{Can}A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left({}_{Can}A_{\mathcal{B}}\right)^{-1}$: usiamo il metodo dei cofattori:

$C_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1$ $\quad C_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ $\quad C_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$ $\quad C_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$ $\quad C_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $\quad C_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ $\quad C_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$

$$\det\left({}_{Can}A_{B}\right) \underset{\substack{\text{sviluppo} \\ \text{lungo riga 2}}}{=} (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -(-2) + -(-1) = 3$$

$$ {}_{B}A_{can} = \left({}_{can}A_{B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} $$

Dal teorema avremmo:

$$ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

è diagonale.

Infatti il prodotto ci da $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$