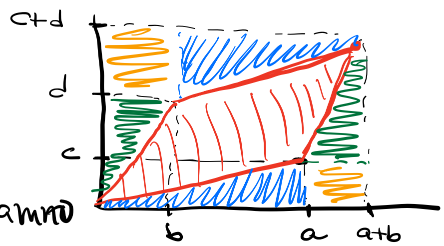
25/05/2026

Proprietà del determinante di una matrice quadrata $n \times n$:

- $A \underset{R_i \leftrightarrow R_j}{\rightsquigarrow} A' \implies \det(A') = -\det A$
- $A \underset{R_i \to \alpha R_i,\ \alpha \neq 0}{\rightsquigarrow} A' \implies \det(A') = \alpha \det(A)$
- $A \underset{R_i \to R_i + \alpha R_j}{\rightsquigarrow} A' \implies \det(A') = \det(A)$
- $\det(A) \neq 0 \iff \operatorname{rk} A = n \iff A$ è invertibile
  $\iff$ tutte n righe sono l.i. $\Big\}$ (*)
  $\iff$ tutte n colonne sono l.i.
- Teorema di Binet $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, per ogni matrice B $n \times n$.
- A invertibile $\implies \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Osservazione: Se ho n vettori in $\mathbb{K}^n$ e voglio sapere se loro costituiscono una base, basta sapere se sono l.i.; però (*) ci dice che per tale basta metterli nelle righe oppure nelle colonne di una matrice $n \times n$ e vedere se il suo determinante è non-nullo.

- $n = 2$, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = area del parallelogramma



Area dei triangoli blu : $2\cdot\left(\frac{ac}{2}\right)$

Area dei triangoli verdi : $2\cdot\left(\frac{bd}{2}\right)$

Area dei quadrati arancia : $2\cdot(c\cdot b)$

$$\text{Area del parallelogrammo} = (a+b)(c+d) - \frac{\cancel{2}ac}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}bd}{\cancel{2}} - 2cb$$
$$= \cancel{ac} + ad + bc + \cancel{bd} - \cancel{ac} - \cancel{bd} - 2cb$$
$$= ad - bc = \det(A).$$

- $n = 3$, $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$ volume del parallelepipedo formato dalle tre colonne.

Torniamo ai sistemi di equazioni:

$Ax = b$, A matrice $m\times n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

m equazioni, n incognite.

Proposizione 3.26 Data una soluzione v di $Ax=b$, l'insieme delle soluzioni del sistema è dato da
$$\{v + w \mid \underbrace{w \text{ è soluzione di } Ax=0}\}$$

w è un elemento del nucleo della funzione lineare associata ad A.

Dimostrazione: Cominciamo dimostrando che se w è soluzione di $Ax=0$ allora $v+w$ è soluzione di

$Ax = b.$

$$A(v+w) = \underbrace{Av}_{\substack{b \\ \text{poichè } v \text{ è} \\ \text{soluzione di } Ax=b}} + \overbrace{Aw}^{\substack{=0 \quad \text{poichè } w \text{ è soluzione} \\ \text{di } Ax=0}} = b + 0 = b$$

Allora $v+w$ è soluzione di $Ax=b$.

Dall'altra parte, supponiamo di avere una soluzione v' di $Ax=b$. Vorrei vedere che esiste w soluzione di $Ax=0$ tale che $v' = v+w$. Questo è equivalente a verificare che $v'-v$ è soluzione di $Ax=0$.

$$A(v'-v) = \underbrace{Av'}_{b} - \underbrace{Av}_{b} = b-b=0. \quad \blacksquare$$

Conclusione: Per trovare tutte le soluzioni di un dato sistema di equazioni basta trovare una soluzione particolare v e una base per il sottospazio di soluzioni di $Ax=0$, ovvero una base del nucleo della funzione lineare associata. Allora in tale caso se $\{w_1, \ldots, w_k\}$ è una tale base, allora tutte le soluzioni sono della forma

$$\underbrace{v}_{\substack{\text{soluzione} \\ \text{particolare}}} + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_k w_k}_{\substack{\text{combinazione lineare della base} \\ \text{delle soluzioni di } Ax=0.}}$$

Ricordiamo inoltre come trovare questa base:

$$(A|0) \underset{\text{eliminazione Gaussiana}}{\rightsquigarrow} (U|0) \rightarrow \text{colonne libere e colonne dominanti}$$

Per ottenere gli elementi di questa base, sostituisco una alla volta, le variabili libere $x_1, \dots, x_k$

per
$$\begin{matrix} x_1 = 1 & x_1 = 0 & & x_1 = 0 \\ x_2 = 0 & x_2 = 1 & \dots & x_2 = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_k = 0 & x_k = 0 & & x_k = 1 \end{matrix}$$

Esempio
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{eliminazione Gaussiano}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|0) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

variabili libere y e z

- $y = 1 \quad z = 0$

  $x + 2.1 + 3.0 = 0$

  $\rightarrow x = -2$

- $y = 0 \quad z = 1$

  $x + 2.0 + 3.1 = 0$

  $\rightsquigarrow x = -3$

Vettori della base dell'insieme di soluzioni di $Ax=0$ sono $\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}$.

Se volesse risolvere $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right) \underset{\text{eliminazione Gaussiana}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + 2y + 3z = 1 \quad y = 0 = z$ mi da una soluzione particolare

$v = (1,0,0)$

Tutte le soluzioni del sistema sono ottenute da

$$(1,0,0) + t_1(2,1,0) + t_2(-3,0,1)$$

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Se abbiamo una matrice $\overline{\text{quadrata } n \times n}$ e il sistema $Ax = b$ ha una unica soluzione allora

$$\operatorname{rk} A = n \iff \det A \neq 0.$$

$$\iff A \text{ è invertibile}.$$

(Se $\det A = 0$, allora $Ax = b$ può avere infinite soluzioni o nessuna soluzione!)

Siccome A è invertibile

$$Ax = b \iff A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$$

$$\iff \underbrace{(A^{-1}A)}_{I_n} x = A^{-1}b$$

$$\iff I_n x = A^{-1}b$$

$$\iff \boxed{x = A^{-1}b}$$

unica soluzione del sistema

Teorema di Cramer. Sia A una matrice $n \times n$ su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) tale che A è invertibile. Si consideri un sistema di equazioni lineari della forma

$$Ax = b$$

dove $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{k}^n$.

L'unica soluzione del sistema ha coordinate $\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ dove $p_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$ dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i per il vettore dei termini noti b.

Dimostrazione ommessa.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad Ax = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$$\underset{\text{sviluppo lungo riga 3}}{\det A = (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} = -(1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2) = -2 \neq 0$$

allora A è invertibile.

$$\det A_1 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\det A_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$\det A_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 8$$

La soluzione del sistema è

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{-2} \\ \frac{-6}{-2} \\ \frac{8}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Verifica $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

Autovalori, autovettori e diagonalizzazione

Ricordiamo che data una funzione $f: V \longrightarrow W$ e una base $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W possiamo studiare f usando la matrice ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$.

Supponiamo che $V = W$, ovvero $f: V \longrightarrow V$, quindi ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ è quadrata. Di solito se stiamo studiando funzioni da V a V, vogliamo usare la stessa base in entrata e in uscita, ovvero considerare le matrici del tipo ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$.

Riusciamo a trovare una base $\mathcal{B}$ di V tale che ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$ sia diagonale?

Supponiamo che ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, ovvero

$$ {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (\dim_{\mathbb{K}} V = n) \\ \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \end{matrix} $$

$$ C_{\mathcal{B}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} $$

$$ \leadsto f(v_1) = \underline{a_{11}} v_1 + \underline{0} v_2 + \dots + \underline{0} v_n $$
$$ = a_{11} v_1 $$

$\vdots$

$$f(v_i) = a_{ii} v_i$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = a_{nn} v_n$$

tutti i vettori della base $\mathcal{B}$ vengono riscalati tramite f.

Quindi per rispondere alla domanda, devo studiare quali sono i vettori v di V che vengono riscalati da f, ovvero per i quali $f(v) = \lambda v$, per un certo $\lambda \in \mathbb{k}$.

Definizione Dato V spazio di dimensione n su $\mathbb{k}$ e $f: V \longrightarrow V$, allora $\lambda \in \mathbb{k}$ si dice un autovalore di f se esiste $v \neq 0$ per cui $f(v) = \lambda v$. Per ogni autovalore $\lambda \in \mathbb{k}$ di f, i vettori v per cui $f(v) = \lambda v$ sono detti autovettori di f associati all'autovalore λ.

Adesso:

- Vogliamo calcolare autovalori e autovettori
- Vogliamo vedere se esiste una base $\mathcal{B}$ fatta di autovettori.