

Esercizi per il corso di MATEMATICA
Corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriali
Foglio 13
20 maggio 2025

Gli esercizi segnati con asterisco sono estratti/adattati dal libro di F. Bottacin, *Esercizi di Algebra Lineare e Geometria*, Società Editrice Esculapio (2021)

- Supponiamo che $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$ è una funzione lineare tale che la matrice $A := {}_{\text{can}}M_{\text{can}}(f)$ ha rango 3.
 - f è iniettiva? f è suriettiva? f è un isomorfismo?
 - Si determini la dimensione di $N(f)$.
 - Si determini la dimensione di un complemento di $\text{Im}(f)$ in \mathbb{R}^7 .
- Si considerino le funzioni lineari che rispetto alle basi canoniche in \mathbb{R}^n hanno le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si determinino basi per i nuclei di queste funzioni lineari.
 - Si determinino basi per le immagini di queste funzioni lineari.
 - Il vettore $(-5, -5, 5)$ appartiene al nucleo della funzione associata ad A ?
 - Il vettore $(1, 1, 1, 1)$ appartiene all'immagine della funzione associata a B ?
 - * Il vettore $u = (1, -2)$ appartiene all'immagine della funzione associata ad E ? Se sì, si determini l'immagine reciproca di $\{u\}$.
 - Si indichino quali di queste funzioni sono iniettive, suriettive o isomorfismi.
- * Sia $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da $f(1, 0, 0) = (2, 1, 0, 1)$, $f(1, 1, 0) = (1, 4, 2, 0)$ e $f(1, 1, 1) = (2, 4, 5, 2)$.
 - Si scriva la matrice ${}_{\text{can}}M_{\text{can}}(f)$.
 - Si trovino basi per il nucleo di f e per l'immagine di f .
 - Si determini per quale/quale valore/valori di t si ha che il vettore $(t, -1, 1, 5)$ appartiene all'immagine di f .

- * Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ di cui la matrice rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

per un parametro t in \mathbb{R} . Si determini per quali valori di t la funzione f non è suriettiva, e per tali valori si trovi una base per l'immagine di f .

5. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

È possibile trovare una base $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ di \mathbb{R}^3 tale che ${}_{\text{can}}M_{\mathcal{B}}(f)$ sia la seguente matrice?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Si considerino le seguenti matrici su \mathbb{R} .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcolino $\det(A)$ and $\det(B)$.
- (b) * Si determini se A e B sono invertibili e, in caso positivo, si trovi la rispettiva matrice inversa usando il metodo dei cofattori.
- (c) Tramite l'uso della matrice inversa, si determini la soluzione del sistema di equazioni

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ su \mathbb{R} e sia λ uno scalare reale. Si consideri la matrice λA ottenuta tramite il prodotto di ogni entrata di A per λ .

- (a) Si usi le proprietà del determinante rispetto alle operazioni elementari per giustificare il fatto che $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- (b) Si usi il Teorema di Binet per giustificare lo stesso fatto.

8. Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 4x + y + z + t = 6 \\ 3x + 7y - z + t = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8t = -3 \\ x + y + z + 2t = 3 \end{cases}$$

- (a) Si scriva il sistema in forma matriciale, cioè, nella forma $Ax = b$ per una matrice A e un vettore di termini noti b .
- (b) Si usi il calcolo di un determinante per giustificare che il sistema ha un'unica soluzione.
- (c) Si risolva il sistema usando eliminazione Gaussiana.