19/05/2026 $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\det : \underbrace{M_{n\times n}(\mathbb{K})}_{\text{matrici } n\times n \text{ su } \mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}$$ definita ricorsivamente:

- $\det((a_{11})) = a_{11}$ per matrici 1×1
- $\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\right) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n})$

dove A_{1j} sono matrici $(n-1)\times(n-1)$ ottenute da A eliminando riga 1 e colonna j.

Esempio $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3\end{pmatrix} + (-1)^{1+2}\cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3\end{pmatrix} + (-1)^{1+3}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$= 3\cdot(2\cdot 3 - (-1)\cdot 1) + (-1)\cdot 2\cdot(1\cdot 3 - 1\cdot 0) + (-1)(1\cdot(-1) - 2\cdot 0)$

$= 3\cdot 7 - 2\cdot 3 + 1 = 16$

Teorema Sia A una matrice $n\times n$ su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

(1) Se A' è ottenuta da A tramite l'operazione elementare di scambio di righe, allora $\det(A') = -\det(A)$

$A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} A'$

(2) Se A' è ottenuta da A tramite l'operazione elementare che moltiplica una riga per uno scalare $\alpha \neq 0$, allora

$A \xrightarrow{R_i \to \alpha R_i} A'$ $\quad \det(A') = \alpha \det(A)$

(3) Se A' è ottenuta da A tramite l'operazione elementare che sostituisce una riga per se stessa sommata al multiplo di un'altra, allora $\det(A') = \det(A)$.

$A \xrightarrow{R_i \to R_i + \alpha R_j} A'$

(4) Se A è una matrice triangolare superiore, ovvero,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

allora

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Dimostrazione ommessa.

Supponiamo che A è invertibile, ovvero $\operatorname{rk} A = n$. Allora una forma ridotta di A avrà la forma

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero la forma ridotta è una matrice triangolare superiore. $\det \mathcal{U} = 1$.

$$A \longrightarrow \longrightarrow \cdots \longrightarrow \longrightarrow \mathcal{U}$$

operazioni elementari

$1 = \det \mathcal{U}$

Cosa sappiamo su $\det A$? Partendo con operazioni inverse da quelle riportate sopra dal $\det \mathcal{U}$, si può ottenere tutti scalari in $\mathbb{K}$ tranne il zero, ovvero $\det A \neq 0$.

Teorema A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.
matrice $n \times n$

Dimostrazione: Abbiamo appena visto che se A è invertibile, allora $\det A \neq 0$. Supponiamo adesso che $\det A \neq 0$. Se U è forma ridotta di A, $\det U \neq 0$. Siccome U è una matrice triangolare superiore, U non può avere 0 sulla diagonale e quindi U non ha righe nulle, ovvero il rango è n e A è invertibile. $\boxed{}$

Teorema (Sviluppo di Laplace) Il determinante di una matrice $n \times n$ su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$) può essere calcolato percorrendo una qualsiasi riga o una qualsiasi colonna come segue:

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

↳ sviluppo di Laplace lungo riga i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

oppure

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{2+j} a_{2j} \det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj})$$

↓ Sviluppo di Laplace lungo colonna j

Dimostrazione ommessa.

<u>Esempio</u>

$$\det\begin{pmatrix}3&2&0&2\\0&1&0&0\\1&-1&2&1\\0&1&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow\\ \text{sviluppo}\\ \text{lungo colonna 3}}}{=} (-1)^{3+3}\cdot 2\cdot\det\begin{pmatrix}3&2&2\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{sviluppo}\\ \text{lungo riga 2}}}{=} (-1)^{3+3}\cdot 2\left((-1)^{2+2}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}3&2\\0&1\end{pmatrix}\right) = 2(3) = 6.$$

Piano delle lezioni mancanti:

25/05 11:30 – 13:30
27/05 10:30 – 13:30
08/06 11:30 – 13:30 (anche su zoom).

<u>Osservazione</u>

$$A = \begin{pmatrix}a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\det A \underset{\substack{\downarrow\\ \text{lungo } 1^a \text{ colonna}}}{=} (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\det\begin{pmatrix}a_{22} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{lungo } 1^a \text{ colonna}}}{=} (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\left((-1)^{1+1}\cdot a_{22}\cdot\det\begin{pmatrix}a_{33} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}\right)$$

$$= \cdots = a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}$$

Proposizione (Calcolo della matrice inversa)

Se A è una matrice $n \times n$ su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e $\det(A) \neq 0$ (ovvero A è invertibile) allora si ha:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c_{11}}{\det(A)} & \frac{c_{21}}{\det(A)} & \frac{c_{31}}{\det(A)} & \cdots & \frac{c_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{c_{12}}{\det(A)} & \frac{c_{22}}{\det(A)} & \frac{c_{32}}{\det(A)} & \cdots & \frac{c_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & & & & \\ \frac{c_{1n}}{\det(A)} & \frac{c_{2n}}{\det(A)} & \frac{c_{3n}}{\det(A)} & & \frac{c_{nn}}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

dove $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ dove A_{ij} è la matrice che si ottiene eliminando riga i e colonna j.

Cofattore (i,j) di A

OSSERVAZIONE Il Cofattore c_{ij} compare nella posizione ji di A^{-1} !!!

Dimostrazione ommessa.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

È invertibile? Se sì calcolare l'inversa!

Sviluppo lungo Colonna 1

$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= -6+3 = -3 \neq 0$ e quindi A è invertibile.

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} = -6 \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix} = -(-6) = 6 \qquad C_{31} = (-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix} = 3$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -(-3) = 3 \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} = -3 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}\det\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix} = -3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = -1 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = -0 = 0 \qquad C_{33} = (-1)^{3+3}\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-6}{-3} & \frac{6}{-3} & \frac{3}{-3} \\ \frac{3}{-3} & \frac{-3}{-3} & \frac{-3}{-3} \\ \frac{-1}{-3} & \frac{0}{-3} & \frac{1}{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Verifica</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vediamo cosa succede per l'inversa di una matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A invertibile $\iff \det A \neq 0$
$\iff ad - bc \neq 0$

$C_{11} = (-1)^{1+1}\det((d)) = d \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}\det((b)) = -b$

$C_{12} = (-1)^{1+2}\det((c)) = -c \qquad C_{22} = (-1)^{2+2}\det((a)) = a$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

$\det(A^{-1}) = ?$

$$\det(A^{-1}) = \frac{d}{ad-bc} \cdot \frac{a}{ad-bc} - \left(\frac{-b}{ad-bc} \cdot \frac{-c}{ad-bc}\right)$$

$$= \frac{da-bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad-bc} = \frac{1}{\det(A)}$$

Teorema di Binet: Se abbiamo due matrici $n \times n$, A e B, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Dimostrazione ommessa.

Osservazione: Se A è invertibile, abbiamo

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

poichè il determinante è il prodotto della diagonale!

$$\| \quad \text{Teorema di Binet}$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$$