18/05/2026

V spazio vettoriale c/ base $\{v_1,\dots,v_n\}=\mathcal{B}$ $\qquad$ W spazio vettoriale c/ base $\{w_1,\dots,w_m\}=\mathcal{C}$

$f: V \longrightarrow W$ $\qquad$ $A = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ matrice $m\times n$.

- A ammette inversa a sinistra $\iff \operatorname{rk} A = n \iff \ker(f)=\{0_V\}$ $\iff$ f è iniettiva
- A ammette inversa a destra $\iff \operatorname{rk} A = m \iff \operatorname{Im}(f)=W$ $\iff$ f è suriettiva
- A è invertibile $\iff \operatorname{rk} A = m = n$.

Inoltre

- $v\in\ker(f) \iff C_{\mathcal{B}}(v)$ è soluzione di $Ax=0$ $\iff A\cdot C_{\mathcal{B}}(v)=0$.

- $w\in \operatorname{Im}(f) \iff C_{\mathcal{C}}(w)$ è combinazione lineare di $\langle \underbrace{C_1,\dots,C_n}_{\text{Colonne di } A} \rangle$.

$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim\langle C_1,\dots,C_n\rangle = \operatorname{rk} A$.

⚠

Osservazione: Se A è una matrice quadrata, allora:
↳ $\dim V = \dim W$

f è iniettiva $\iff$ f è suriettiva $\iff$ f è isomorfismo

Attenzione: Questo è un fatto speciale per funzioni lineari fra spazi della stessa dimensione!

Se f è iniettiva, allora $\operatorname{rk} A = n$ e quindi $\operatorname{rk} A = m = n$. Allora f è suriettiva. Reciprocamente, vale il ragionamento analogo!

Osservazione 2 Ricordiamo il Teorema "Nullità + rango"

(*) $\quad \dim V = \underbrace{\dim\ker f}_{\text{"nullità"}} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{\text{"rango"}}$. $\longrightarrow$

$\longrightarrow \dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rk}\, A.$

Se A è quadrata e f è iniettiva, allora (*) si legge

$$\dim V = 0 + \dim \mathrm{Im}(f)$$
$$n = \mathrm{rk}\, A. \quad \longrightarrow f \text{ suriettiva}$$

Se A è quadrata e f è suriettiva, allora (*) si legge

$$\underbrace{\dim V}_{\substack{\parallel \\ n}} = \dim \ker(f) + \underbrace{\dim W}_{\substack{\parallel \\ n}}$$

$$\Longrightarrow \dim \ker(f) = 0$$
$$\Longrightarrow f \text{ è iniettiva!}$$

Cosa si può dire sullo spazio generato dalle colonne di una matrice? Sapiamo già che questo spazio ha dimensione uguale al rango della matrice.

Abbiamo visto che data una matrice A $m \times n$ il sottospazio generato dalle righe $R(A)$ ha per base le righe non-nulle di una forma ridotta di A. Questo succede perchè operazioni elementari sulle righe non cambia il sottospazio $R(A)$.

In generale operazioni elementari nelle righe di A cambiano lo spazio delle colonne, quindi NON È VERO in generale che le colonne dominanti della matrice in forma ridotta siano una base dello spazio delle colonne di A (spesso scriverò $C(A)$)

Però Una base per $C(A)$ è ottenuta prendendo le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti della sua forma ridotta

(dimostrazione ommessa).

Esempio Si consideri la funzione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z,t) \longmapsto (3x-y+z+2t,\ 2x+2y+6z-4t,\ x+4y+9z-8t)$$

Si determini una base per $\mathrm{Im}(f)$.

Calcoliamo

$$\underset{Can_3\ Can_4}{M}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & -8 \end{pmatrix} = A$$

Per calcolare una base di $\mathrm{Im}(f)$, basta trovare una base per $C(A)$ e questo possiamo farlo usando eliminazione Gaussiana:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & -8 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -8 \\ 2 & 2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -8 \\ 0 & -6 & -12 & 12 \\ 0 & -13 & -26 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-6}]{} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -13 & -26 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 13R_2]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Colonne dominanti

base per $C(A)$: $\underbrace{\{(3,2,1),(-1,2,4)\}}_{\text{base per } \mathrm{Im}(f)}$.

Il determinante di una matrice quadrata

Definizione Sia $\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$. Definiamo una funzione $\det : \left\{ \begin{matrix} \text{matrici } n\times n \\ \text{con entrate} \\ \text{in } \mathbb{k} \end{matrix} \right\} \longrightarrow \mathbb{k}$

per ricorrenza nel seguente modo:

- per $n=1$, $\det((a_{11})) = a_{11}$
- per $n>1$, fissiamo la prima riga di A e percorriamola facendo il seguente calcolo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \det A = & (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \det(A_{11}) + \\ & (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \det(A_{12}) + \cdots \\ & \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \det(A_{1n}) \end{aligned}$$

dove A_{1j} sono le matrici $n-1$ per $n-1$ ottenute da A eliminando riga 1 e colonna j.

Esempio $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det((a_{22})) \\ &+ (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det((a_{21})) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

Esempio $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

"Regola di Sarrus" (solo per 3×3)

$$\left(\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right) \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Esempio Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\cancel{+ (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \det(\ldots)}}_{=0} + (-1)^{1+4} \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3\det\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&1\\1&0&1\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}0&0&0\\1&2&1\\0&0&1\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$= 3\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix} - 2\cdot 0 - 2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$$

$$= 3\cdot 2 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 = 6.$$

Proprietà del determinante: (vediamo il caso 2×2)

$$\det\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1 \qquad \det\begin{pmatrix}1&*\\0&1\end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix}1&0\\*&1\end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix}a_{11}&*\\0&a_{22}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}$$

Come cambia il determinante con le operazioni elementari?

$$\underset{A}{\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \underset{A'}{\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{11}&a_{12}\end{pmatrix}}$$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\det A' = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$

Scambiare righe cambia il segno del determinante.

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \xrightarrow[\substack{R_1 \to \alpha R_1 \\ \alpha \neq 0}]{} \underset{A'}{\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}$$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\det A' = \alpha a_{11}a_{22} - \alpha a_{12}a_{21}$

$\det A' = \alpha \det A$

Moltiplicare una riga per uno scalare non-nullo cambia il determinante moltiplicandolo per lo stesso scalare.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 + \alpha R_2]{} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A'}$$

$$\begin{aligned} \det A' &= (a_{11}+\alpha a_{21})a_{22} - (a_{12}+\alpha a_{22})a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} + \alpha a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - \alpha a_{22}a_{21} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \end{aligned}$$

La terza operazione elementare non cambia il determinante.