12/05/2026

A matrice $m \times n$
B matrice $n \times m$
Se $AB = I_m$ allora B è inverso a destra di A ($\Rightarrow m \leq n$)
Se $BA = I_n$ allora B è inverso a sinistra di A ($\Rightarrow n \leq m$)

A ammette inversa a destra $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rk} A = m$
$\Longleftrightarrow$ $Ax = b$ ha soluzioni per qualunque $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

La dimostrazione ci dice come calcolare l'inversa a destra di A.
Dobbiamo risolvere m sistemi di equazioni lineari:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots\ldots, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ Soluzione: Colonna 1 di B $\downarrow$ matrice completa $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$

$\downarrow$ Soluzione: Colonna 2 di B $\downarrow$ matrice completa $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$

$\ldots$

$\downarrow$ Soluzione: colonna m di B $\downarrow$ matrice completa $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$

$\longrightarrow$ facciamo eliminazione Gaussiana su tutte queste matrici complete contemporaneamente

1 matrice "completa aumentata"

$$\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix}\right) = (A \mid I_m)$$

$\rightsquigarrow$ procedendo con eliminazione Gaussiana fino alla forma ridotta e dopo con ulteriore eliminazione Gaussiana da giù in su, si otterrà una matrice

$$(*) \quad \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & & 0 & & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 & \cdots & \tilde{B}_m \\ & \ddots & & \underbrace{*}_{\text{colonne libere}} & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & \end{array}\right)$$

$\longrightarrow$ da qui si possono ricavare soluzioni per i sistemi (fissando valori per le variabili libere)

Ricordiamo che se A è quadrata e ha inverso a destra, allora è invertibile. In tale caso $\operatorname{rk} A = m$ = n° di righe = n° di colonne

$\downarrow$
A è quadrata

e allora in $(*)$ non ci sono colonne libere, per cui $(*)$ ha la forma

$$\left(I_m \mid A^{-1}\right)$$

$\hookrightarrow$ matrice inversa di A.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A è invertibile poichè è quadrata e ha rango 2. Devo risolvere $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prendiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to \frac{R_1}{3}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{2}{3}R_2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I_2 $\qquad$ A^{-1}

<u>verifica</u>

AA^{-1} : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

<u>Esercizio</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) A è invertibile? Perchè?

b) Se sì, allora si calcoli A^{-1}.

a) Sì, dato che A ha rango $=$ n° di righe $= 3$ ed è quadrata.

b) $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_1 \to R_1 - 2R_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I_3 $\qquad$ A^{-1}

<u>Verifica</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Siccome A ha rango 2, allora ammette inversa a destra.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to -R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Adesso guardiamo soluzioni per i due sistemi separatamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

z variabile libera $\qquad$ z variabile libera

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + z \end{cases}$$

Soluzioni: $\begin{pmatrix} 1 \\ z \\ z \end{pmatrix}$ $\qquad$ Soluzioni $\begin{pmatrix} 0 \\ -1+z \\ z \end{pmatrix}$

<u>Per esempio</u> $(z=0)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ <u>Per esempio</u> $(z=0)$ $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Allora una inversa a destra di A è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ma anche per $z = 1$ ottengo soluzioni

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ per il primo sistema $\qquad$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ per il secondo sistema.

Allora un'altra inversa a destra di A è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Verifica $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inversa a destra per una matrice non quadrata, se esiste non sarà unica!

Proposizione Sia A una matrice $m \times n$ su $\mathbb{K}$ (dove $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) A ammette un'inversa a sinistra.

(2) $\operatorname{rk} A = n$ = n° di colonne.

(3) Il sistema $Ax = 0_{\mathbb{K}^m}$ ha un'unica

soluzione (quella banale, la soluzione nulla).
Ovvero, il sistema $Ax=0$ non ammette soluzioni non-nulle.

Dimostrazione: $(1) \Rightarrow (3)$

Supponiamo che A ammette un'inversa a sinistra, diciamo S. Prendiamo $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ una soluzione di $Ax=0$, cioè $A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to 0_{\mathbb{K}^m}$. Moltiplicando questa espressione in entrambi lati per S a sinistra, otteniamo

$$\underbrace{S\left(A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right)}_{(SA)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} = \underbrace{S\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \to 0_{\mathbb{K}^n}}$$

$$\underset{\substack{S \text{ è inversa} \\ \text{a sinistra} \\ \text{di } A}}{\Longleftrightarrow} I_n\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$(2) \Leftrightarrow (3)$ $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right)$ ha un'unica soluzione se e solo se non ci sono variabili libere, ovvero se e solo se $\operatorname{rk} A = n$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Dimostrazione ommessa. $\boxtimes$

Corollario Sia A una matrice quadrata $n \times n$ su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) A è invertibile
(b) $\operatorname{rk} A = n$
(c) il sistema $Ax = b$ ha soluzioni per ogni b.
(d) il sistema $Ax = 0$ ha un'unica soluzione.
(e) Le righe di A sono l.i.
(f) Le colonne di A sono l.i.

Dimostrazione Siccome A è quadrata, essere invertibile è equivalente ad essere invertibile a destra e quindi equivalente a (b) e (c); però è anche equivalente ad essere invertibile a sinistra e quindi equivalente alla condizione (d).

Ricordiamo che $\operatorname{rk} A = \dim \langle \text{righe di } A \rangle$
Quindi $\operatorname{rk} A = n \iff$ tutte le n righe sono l.i.

Per fine vediamo che

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{c_1} \qquad \underbrace{}_{c_2} \qquad \underbrace{}_{c_n}$$

prima colonna — seconda colonna — n-esima colonna

il sistema $Ax = 0$ ha soltanto la soluzione banale

$\Longleftrightarrow$ l'unica combinazione lineare delle colonne di A che mi da 0 è quella banale

$\Longleftrightarrow$ le colonne di A sono l.i. $\blacksquare$

Teorema Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ basi di V e W e sia $A = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$, per $f : V \longrightarrow W$

Allora si ha:

(a) Il nucleo di f è il sottospazio di V i cui vettori sono espressi in base $\mathcal{B}$ come le soluzioni del sistema $Ax = 0$.
In particolare, $\ker f = \{0\}$ se e solo se A ammette un'inversa a sinistra, ovvero f è iniettiva se e solo se A ammette inversa a sinistra.

(b) L'immagine di f è il sottospazio di W i cui vettori sono espressi in base $\mathcal{C}$ come

combinazioni lineari delle colonne di A.
In particolare f è suriettiva se e solo se $\operatorname{rk} A = m = \dim W$ e questo succede se e solo se A ammette inversa a destra.

(c) f è un isomorfismo se e solo se A è invertibile. Inoltre,

$$A^{-1} = {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(f^{-1}).$$