13/05/2026

Teorema: Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), $f: V \to W$ una funzione lineare, $\mathcal{B}=\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e $\mathcal{C}=\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di W. Scriviamo A per la matrice ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$. Allora, si ha:

⚠ $\ker f = \{v \in V : f(v)=0\}$

(a) Il nucleo di f è il sottospazio di V i cui vettori sono espressi in base $\mathcal{B}$ come le soluzioni del sistema $Ax=0$.
In particolare, f è iniettiva se e solo se A ammette inversa a sinistra.

(b) L'immagine di f è il sottospazio di W i cui vettori sono espressi in base $\mathcal{C}$ come combinazioni lineari delle colonne di A.
In particolare, f è suriettiva se e solo se A ammette inversa a destra.

(c) f è un isomorfismo se e solo se A è invertibile e, in tale caso, ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(f^{-1}) = A^{-1}$.

Dimostrazione: (a) $\ker f = \{v \in V : f(v)=0\}$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathcal{C}_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\mathcal{C}_{\mathcal{C}}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A\cdot\_"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd} \qquad (*)$$

I vettori di $\ker f$ sono precisamente i vettori $v \in V$ tali che $\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(f(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbb{K}^m}$

$$\mathcal{C}_{\mathcal{C}}(f(v)) = A\cdot(\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(v)).$$

Allora il vettore delle coordinate in $\mathcal{B}$ di v è tale che $A \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{B}}(v) = 0$, ovvero $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}(v)$ è soluzione di $Ax=0$.

Se f è iniettiva, allora $\ker f = \{0_V\}$, ovvero l'unica soluzione di $Ax=0$ è il vettore nullo, per cui A

ammette inversa a sinistra. Reciprocamente, se A ammette inversa a sinistra, allora $Ax=0$ ha un'unica soluzione (quella banale) e allora $\ker f = \{0\}$ e f è iniettiva.

(b) $\mathrm{Im}(f) = \{ w \in W : \exists\, v \in V : f(v) = w \}$

Da (*) si deduce che i vettori $w \in \mathrm{Im}(f)$ sono precisamente quelli che in base $\mathcal{C}$ si esprimono come un prodotto $A \cdot C_{\mathcal{B}}(v)$.

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n$$ e allora i vettori

Colonne di A.

$w \in \mathrm{Im}(f)$ sono precisamente quelli che in base $\mathcal{C}$ sono combinazioni lineari delle colonne di A.

Se f è suriettiva, allora $\mathrm{Im}(f) = W$, ovvero $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W = m$. Questo vuole dire che il sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A ha dimensione m, ovvero è tutto $\mathbb{K}^m$.

Adesso usiamo un fatto che non dimostreremo

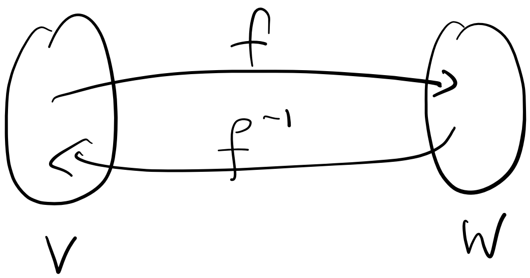
La dimensione dello spazio generato dalle colonne è uguale al rango di A (e quindi uguale alla dimensione dello spazio generato dalle righe)!

Allora $\mathrm{rk}\, A = m$ e quindi A ammette inversa a destra. Reciprocamente, il ragionamento è analogo.

(c) Se f è un isomorfismo, allora A ammette inversa sia a destra che a sinistra e quindi è invertibile. Reciprocamente, se A è invertibile allora f è sia iniettiva che suriettiva e quindi f è un isomorfismo (usando parti a) e b)).

Sia f^{-1} la funzione inversa di f, abbiamo

$$f \circ f^{-1} = id_W \qquad e \qquad f^{-1} \circ f = id_V$$



Allora

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(id_W) &= I_m \\
&\parallel \\
\underbrace{{}_{\mathcal{C}}M(f)_{\mathcal{B}}}_{A}\ {}_{\mathcal{B}}M(f^{-1})_{\mathcal{C}}
\end{aligned}
$$

e allora ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{C}}(f^{-1}) = A^{-1}$. $\blacksquare$

Esempio: Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che
$$f(x,y) = (x+3y,\ 2x-y)$$

a) f è un isomorfismo?

b) In caso positivo si trovi l'espressione della funzione f^{-1}.

a) Scriviamo $A = {}_{can}M_{can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\underbrace{}_{f(1,0)_{can}} \quad \underbrace{}_{f(0,1)_{can}}$

f è isomorfismo se e solo se A è invertibile. Siccome A è 2×2 (quadrata) basta vedere se il suo rango è 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-7}]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rk}\, A = 2.$

Si, è un isomorfismo!

b) $f^{-1}(x,y) = ?$

Calcolo A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{R_2}{-7}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 3R_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

<u>Verifica:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dal teorema $\quad A^{-1} = {}_{can}M_{can}(f^{-1})$

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{7} + \frac{3y}{7} \, , \, \frac{2x}{7} - \frac{y}{7} \right)$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{7} + \frac{3y}{7} \\ \frac{2x}{7} - \frac{y}{7} \end{pmatrix}$$