11/05/2026

Nell'esempio precedente, abbiamo visto che la funzione

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{per cui} \quad \begin{aligned} f(1,0,0) &= (2,1,2) \\ f(1,1,0) &= (3,1,-1) \\ f(1,1,1) &= (2,0,1) \end{aligned}$$

ha la matrice ${}_{Can}M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ associata.

Allora $f(x,y,z) = (2x+y-z,\ x-z,\ 2x-3y+2z)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x - z \\ 2x - 3y + 2z \end{pmatrix}$$

c) Per quali valori di (x,y,z) si ha $f(x,y,z) = (1,1,1)$?

Per risolvere questo problema devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \text{matrice completa} \quad \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{matrix}}_{{}_{Can}M_{Can}(f)} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

Posso allora riscrivere il sistema in forma matriciale, ovvero

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(esercizio da concludere a casa!)

Sistema di equazioni lineari :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \longrightarrow$$

matrice dei Coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vettore delle incognite

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

vettore dei termini noti

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Risovere questo sistema di equazioni equivale a trovare vettori colonna $\overline{c}$ tali che

$$A\overline{c} = \overline{b}$$

, ovvero, risolvere un'equazione matriciale del tipo

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

Se connoscessimo una matrice inversa per A, diciamo B, allora avremo

$$B(A\overline{x}) = B\overline{b}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(BA)}_{I}\overline{x} = B\overline{b}$$

$$\Leftrightarrow I\overline{x} = B\overline{b}$$

$$\Leftrightarrow \overline{x} = B\overline{b}$$

⇝ troverei la desiderata soluzione!

Adesso cerchiamo di capire se matrice inverse esistono, come calcolarle; e a che fine usarle!

Invertibilità di matrici

Definizione: Sia A una matrice $m \times n$ su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$). Una matrice $n \times m$, B su $\mathbb{k}$ si dice

(i) inversa a destra di A se

$$AB = I_m$$

(ii) inversa a sinistra di A se

$$BA = I_n$$

(iii) inversa di A se

$$AB = I_m \quad e \quad BA = I_n$$

In quest'ultimo caso diciamo che A è invertibile e B è l'inversa di A.

Esempi:
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Pk = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Allora k è inversa a destra di P e P è inversa a sinistra di k

$$kP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ & \dots & & \end{pmatrix} \longrightarrow \text{non essendo zero questa matrice non è } I_4$$

allora P non è inversa a destra di k. e k non è inversa a sinistra di P.

Riusciamo a trovare un'inverso a sinistra per P?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Sistema di 16 equazioni lineari a 8 incognite.}}$$

entrata	
11	$c_{11} = 1$
12	$-c_{12} = 0$
21	$c_{22} = 0$
22	$-c_{22} = 1$
13	$c_{12} = 0$
14	$2c_{11} + 4c_{12} = 0$ ✗

il sistema è impossibile!

Quindi ci sono delle matrici che ammettono inversi a destra ma non a sinistra!

Proposizione Sia A una matrice $m \times n$ su $\Bbbk$ (dove $\Bbbk = \mathbb{R}$ o $\Bbbk = \mathbb{C}$).

(a) Se A ammette un'inversa a destra allora $m \leq n$

(b) Se A ammette un'inversa a sinistra allora $n \leq m$

(c) Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i) A è invertibile
- (ii) A è quadrata e ammette inversa a sinistra
- (iii) A è quadrata e ammette inversa a destra

In questo caso, l'inversa a sinistra di A coincide con l'inversa a destra di A e la denotiamo per A^{-1}.

Dimostrazione: (a) Supponiamo che $\overset{m \times n}{A}$ ammette un' inversa a destra, diciamo $\underset{n \times m}{B}$, ovvero $AB = I_m$.

Consideriamo un sistema di equazioni della forma

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

dove $c_1, \ldots, c_m$ sono scalari in $\Bbbk$.

Proviamo a risolvere questo sistema usando la matrice B.

$$\underbrace{A}_{m\times n}\left(\underbrace{B\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}}_{n\times 1}\right) = (AB)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow\\ B \text{ inversa}\\ \text{a destra di } A}}{=} I_m\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}$$

Allora $B\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}$ è soluzione del sistema di equazioni.

Dal teorema di Rouché - Capelli, segue che siccome questo sistema ammette sempre soluzioni per qualunque vettore di termini noti,

$$rk(A) = rk\left(A \,\middle|\, \begin{matrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{matrix}\right) \quad \text{per qualunque vettore } \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_m\end{pmatrix}$$

Questo vuol dire allora che nella forma ridotta di A non ci possono essere righe nulle, e allora

$$\boxed{rk(A) = n^\circ \text{ righe di } A = m}$$

Quindi il n° di colonne dominanti è m e allora $m \leq n$.

b) Supponiamo che A ammette un'inversa a sinistra, diciamo B $(n\times m)$.

$$BA = I_n$$

Allora B ammette un'inversa a destra! Allora applichiamo la parte a) alla matrice B per concludere

$n \leq m$.

c) Dimostriamo che

se A è invertibile allora A è quadrata e ammette inversi a destra e a sinistra

ovvero $(i) \Rightarrow (ii)$
e $(i) \Rightarrow (iii)$

(le altre sono ommesse)

Questo è semplice: se A è invertibile, per definizione ammette inverse a sinistra e a destra e dalla parte (a) si ha che $m \leq n$ e dalla parte (b) si ha che $n \leq m$. Allora $m = n$ e A è quadrata.

Vediamo per fine che se A è invertibile con inversa a destra D e inversa a sinistra S, allora $S = D$.

$$S = SI_m = S\underbrace{(AD)}_{I_m} = \underbrace{(SA)}_{I_n}D = I_nD = D$$

$\blacksquare$

Proposizione: Sia A una matrice $m \times n$ su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a) A ammette un'inversa a destra.

(b) $\operatorname{rk} A = m$

(c) $A\overline{x} = \overline{b}$ ha soluzioni per qualunque vettore $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Dimostrazione: Abbiamo già visto (a) $\Rightarrow$ (c) e (c) $\Rightarrow$ (b). Per dimostrare l'equivalenza delle affermazioni basta allora dimostrare (b) $\Rightarrow$ (a).

Supponiamo che $\operatorname{rk} A = m$. Dal teorema di Rouché - Capelli si ha allora che $(A|b)$ ha anche rango m per qualunque vettore b e allora il sistema $Ax = b$ ha sempre soluzioni (ovvero vale l'affermazione (c)).

Vogliamo trovare una matrice B inversa a destra di A

m colonne di B.

$$A \cdot (B_1 \; B_2 \; \cdots \; B_m) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che la prima colonna di AB è AB_1 e vogliamo che $AB_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi per ottenere la prima colonna di B, devo risolvere il sistema di equazioni $A\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Analogamente per trovare la j-esima colonna della matrice B, devo risolvere il sistema

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \text{posizione } j. \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

↳ j-esima colonna di I_m

Siccome per ipotesi tutti questi sistemi ammettono soluzione, riesco a trovare la matrice B.

▨