

## Esercizi per il corso di MATEMATICA

Corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriale

### Foglio 11

7 maggio 2026

1. (a) Si dimostri che  $\mathcal{B} := \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, -1, 0), (1, 1, 1, -1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ .  
(b) Si trovi l'espressione generale della funzione lineare  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  unicamente definita dalle proprietà

$$\begin{aligned} f(1, 0, 0, 0) &= (2, 0, 1) & f(1, 1, 0, 0) &= (1, 1, 1) \\ f(1, 1, -1, 0) &= (0, 0, -1) & f(1, 1, 1, -1) &= (2, 0, -2) \end{aligned}$$

- (c) Si dimostri che  $\mathcal{C} := \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .  
(d) Si considerino le basi canoniche  $\text{can}_4$  di  $\mathbb{R}^4$  e  $\text{can}_3$  di  $\mathbb{R}^3$ . Si calcolino le seguenti matrici.

- i.  ${}_{\text{can}_3}M_{\mathcal{B}}(f)$
- ii.  ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$
- iii.  ${}_{\text{can}_3}M_{\text{can}_4}(f)$
- iv.  ${}_{\mathcal{C}}M_{\text{can}_4}(f)$ .

2. Si considerino le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si scriva l'espressione generale (ovvero  $\varphi(x, y, z) = ?$ ) della funzione  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  per cui la matrice  $A = {}_{\text{can}}M_{\text{can}}(\varphi)$ .  
(b) Si scriva anche l'espressione generale delle funzioni associate a  $B, C, D$  e  $E$  (rispetto alle basi canoniche).  
(c) Si calcolino i prodotti  $EA; BC; D^2$ .
3. Sia  $M(m \times n, \mathbb{R})$  l'insieme delle matrici  $m \times n$  su  $\mathbb{R}$ . Si definisca per ogni  $\lambda$  in  $\mathbb{R}$  e per ogni matrix  $A$  in  $M(m \times n, \mathbb{R})$  una nuova matrice  $\lambda \cdot A$  moltiplicando ogni entrata di  $A$  per  $\lambda$ .
- (a) Si dimostri che  $M(m \times n, \mathbb{R})$  con l'operazione di somma di matrici e operazione di riscaldamento come definito sopra e uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .  
(b) Si trovi una base per  $M(m \times n, \mathbb{R})$  e si dimostri che  $M(m \times n, \mathbb{R})$  ha dimensione  $mn$ .
4. Si considerino le seguenti matrici  $2 \times 2$  su  $\mathbb{R}$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Si calcolino le seguenti matrici:
- i.  $2A + C$
  - ii.  $3B - D - 2A$
  - iii.  $A(4B + C)$

iv.  $ABCD$

v.  $2(-C - D)B$

(b) Si dimostri che  $\{A, B, C, D\}$  è una base di  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ .

(c) Si trovino le coordinate della matrice identità  $2 \times 2$  rispetto alla base  $\{A, B, C, D\}$ .

5. Si  $V$  il sottoinsieme delle matrici  $3 \times 2$  su  $\mathbb{C}$  per cui la seconda riga è nulla.

(a) Si dimostri che  $V$  è un sottospazio di  $M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$  su  $\mathbb{C}$ .

(b) Si trovi una base di  $V$  su  $\mathbb{C}$ .

(c) Si trovi un complemento di  $V$  in  $M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$ .

6. Torniamo ad un esercizio precedente. Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una funzione lineare definita da  $f(x, y, z) = (y, y + x - z, 3y, z - x)$

(a) Si trovi la matrice di  $f$  rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.

(b) Si verifichi che  $B = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Si calcoli la matrice di cambio di base dalla base  $B$  alla base canonica.

(d) Si calcoli la matrice di cambio di base dalla base canonica alla base  $B$ .

(e) Si trovi la matrice di  $f$  rispetto alla base  $B$  nel dominio e alla base canonica nel codominio.

(f) Si confermi la risposta precedente usando la formula del cambio di base.

7. Torniamo ad un esercizio precedente. Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare tale che  $f(1, 1, 0, 0) = (3, 1, 2)$ ,  $f(1, 0, 1, 0) = (2, 0, 2)$ ,  $f(0, 1, 0, 0) = (-1, -2, 1)$  e  $f(0, 0, 1, 1) = (1, -1, 2)$ .

(a) Si verifichi che i vettori di  $\mathbb{R}^4$  elencati costituiscono una base, che chiameremo  $B$ .

(b) Si scriva l'espressione generale della funzione lineare  $f$  per un vettore  $(x, y, z, t)$ .

(c) Si scriva la matrice di  $f$  rispetto alla base  $B$  nel dominio e alla base canonica nel codominio.

(d) Si calcoli la matrice di cambio di base dalla base  $B$  alla base canonica in  $\mathbb{R}^4$ .

(e) Si calcoli la matrice di cambio di base dalla base canonica alla base  $B$  in  $\mathbb{R}^4$ .

(f) Si usi la formula del cambio di base per calcolare la matrice di  $f$  rispetto alle base canoniche sia nel dominio che nel codominio.

8. Sia  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione di rotazione intorno all'origine di  $2\pi/3$  e sia  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la funzione che invia ogni vettore nella sua riflessione rispetto all'asse delle  $xx$ . Si calcolino le matrici di  $f$ , di  $g$ , di  $g \circ f$  e di  $f \circ g$  rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio, e si determinino l'espressioni generali di  $g \circ f$  e di  $f \circ g$  per un vettore  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}^2$ .