06/05/2026

Abbiamo visto che dati V, W, U spazi vettoriali su $\mathbb{k}$ (dove $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{k} = \mathbb{C}$), date funzioni lineari $f : V \longrightarrow W$, $g : W \longrightarrow U$ e fissate delle basi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ in V, $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ in W e $\mathcal{D} = \{u_1, \dots, u_\ell\}$ in U,

la matrice associata a $g \circ f : V \longrightarrow U$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, ovvero la matrice

$$\boxed{{}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{B}}(g \circ f) = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(g) \cdot {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)}$$

—//—

Concentriamoci soltanto sulla funzione $f : V \longrightarrow W$ e date basi $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e $\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$

basi $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ e $\mathcal{C}' = \{w_1', \dots, w_m'\}$ di W

Come possiamo calcolare

$${}_{\mathcal{C}'}M_{\mathcal{B}'}(f) \text{ partendo da } {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) \text{ ?}$$

Per questo, usiamo le matrici di cambi di base ${}_{\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}}(id)$ e ${}_{\mathcal{C}'}M_{\mathcal{C}}(id)$.

Teorema (Teorema del cambio di base) Siano V, W, $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ come indicato sopra, e $f: V \longrightarrow W$ una funzione lineare. Si ha:

$$\boxed{{}_{\mathcal{C}'}M_{\mathcal{B}'}(f) = {}_{\mathcal{C}'}M_{\mathcal{C}}(id)\; {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)\; {}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}(id)}$$

$${}_{\mathcal{C}'}M_{\mathcal{B}'}(f) = {}_{\mathcal{C}'}A_{\mathcal{C}}\; {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)\; {}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}'}$$

Dimostrazione:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id"] \arrow[d, "c_{\mathcal{B}'}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[r, "id"] \arrow[d, "c_{\mathcal{C}}"] & W \arrow[d, "c_{\mathcal{C}'}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}'}(id)"'] & \mathbb{K}^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)"'] & \mathbb{K}^m \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}'}M_{\mathcal{C}}(id)"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

Nella riga inferiore vediamo la sequente di matrici che dobbiamo moltiplicare per un vettore colonna in base $\mathcal{B}'$ per ottenere l'espressione in base $\mathcal{C}'$ dell'immagine di tale vettore tramite f.

$\blacksquare$

Esempio: Consideriamo la base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\} \text{ di } \mathbb{R}^3.$$

Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'unica funzione lineare tale

Che $f(1,0,0) = (2,1,2)$
$f(1,1,0) = (3,1,-1)$
$f(1,1,1) = (2,0,1)$

a) Si determinino le matrici

$${}_{Can}A_B \quad , \quad {}_BA_{Can} \quad , \quad {}_{Can}M_B(f), \quad {}_{Can}M_{Can}(f) \quad ,$$

$${}_BM_B(f)$$

- $${}_{Can}A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $${}_BA_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1,0,0) = \underline{1}\,(1,0,0) + \underline{0}\,(1,1,0) + \underline{0}\,(1,1,1)$$

$$(0,1,0) = \underline{-1}\,(1,0,0) + \underline{1}\,(1,1,0) + \underline{0}\,(1,1,1)$$

$$(0,0,1) = \underline{0}\,(1,0,0) + \underline{-1}\,(1,1,0) + \underline{1}\,(1,1,1)$$

- $${}_{Can}M_B(f) = \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f(1,0,0)_{Can} & f(1,1,0)_{Can} & f(1,1,1)_{Can} \end{array}$$

- $_{Can}M_{Can}(f) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Cambio di} \\ \text{base}}}{=} \underset{\substack{\| \\ I_3}}{{}_{Can}A_{Can}} \; {}_{Can}M_B(f) \; {}_BA_{Can}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

- $_BM_B(f) = {}_BA_{Can} \; {}_{Can}M_B(f) \; \overset{\substack{I_3 \\ \|}}{{}_BA_B}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Verificare!}$$

b) Calcoliamo $f(x, y, z)$?

Basta moltiplicare $_{Can}M_{Can}(f)$ per $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{can}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x - z \\ 2x - 3y + 2z \end{pmatrix}$$

$$f(x, y, z) = (2x + y - z \,,\, x - z \,,\, 2x - 3y + 3z)$$