05/05/2026

Prodotto di matrici $\rightsquigarrow$ Composizione di funzioni lineari

$$f: \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^p \qquad (\mathbb{k}=\mathbb{R} \text{ o } \mathbb{k}=\mathbb{C})$$
$$g: \mathbb{k}^p \longrightarrow \mathbb{k}^n$$

${}_{can}M_{can}(f) = A$ matrice $p \times n$

${}_{can}M_{can}(g) = B$ matrice $m \times p$

$B \cdot A$ matrice $m \times n$

$\|$

${}_{can}M_{can}(g \circ f)$

Composizione

$g \circ f : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}$

Come si fa il prodotto di due matrici?

⚠ È possibile calcolare $B \cdot A$ se e solo se il numero di colonne di B è uguale al numero di righe di A.

⚠ In tale caso: n° righe BA = n° righe di B
n° colonne BA = n° colonne di A.

Esempio $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si calcolino, se possibile, AB e BA

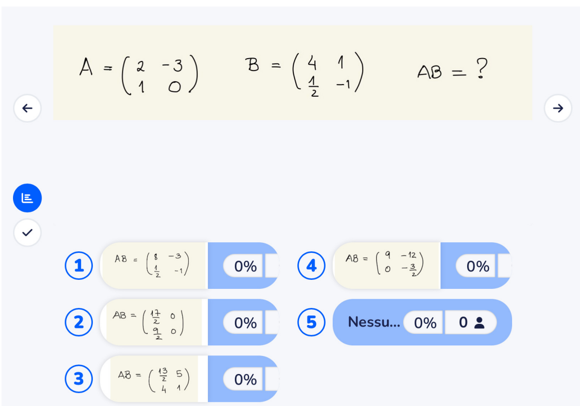
AB non è definita perchè il n° di colonne di A (4) non è lo stesso che il n° di righe di B (2)

BA è definita perchè n° colonne di B = = n° righe di A = 3.

BA sarà una matrice 2×4

$$\big(\underbrace{B}_{2\times 3}\ \underbrace{A}_{3\times 4} \quad 2\times 4\big)$$

$$BA = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{12} & \boxed{11} \\ \boxed{-\frac{3}{2}} & \boxed{-\frac{3}{2}} & \boxed{-\frac{5}{2}} & \boxed{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$



$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 4 + (-3)\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot 1 + (-3)(-1) \\ 1\cdot 4 + 0\cdot\frac{1}{2} & 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Osservazione: In generale, anche nei casi in cui AB e BA sono entrambe definite, $AB \neq BA$. Allora il prodotto di matrici si dice non-commutativo.

Ricordiamo che la matrice $n \times n$ con 1 nella diagonale e zero altrove è detta la matrice identità $n \times n$, ovvero

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma Data una matrice A $m \times n$, si ha che

$$I_m A = A$$
$$A I_n = A$$

Dimostrazione: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$AI_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{pmatrix}$$ per la regola di calcolo del prodotto di matrici $\blacksquare$

Lemma Il prodotto di matrici è associativo, ovvero $A(BC) = (AB)C$.

Dimostrazione: ommessa.

Definiamo adesso la somma di due matrici

A e B matrici $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Definiamo

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Lemma: Siano A e B matrici $m \times n$, C una matrice $n \times k$ e D una matrice $l \times m$. Allora si ha:

(1) $D(A+B) = DA + DB$

(2) $(A+B)C = AC + BC$

Dimostrazione: ommessa.

Domanda (da rispondere la prossima settimana!)
Data una matrice A $m \times n$ è possibile trovare una matrice B tale che AB sia la matrice identità? ovvero, è possibile trovare "inversi" per una matrice?

Dato uno spazio vettoriale V e una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} id : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(id) = ?$$

La prima colonna di ${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(id)$ è $id(v_1)$ in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$, ovvero v_1 scritto in coordinate rispetto a $\mathcal{B}$

$$v_1 = 1\,v_1 + 0\,v_2 + 0\,v_3 + \dots + 0\,v_n$$

Seconda colonna

$$v_2 = \underset{\smile}{0}\, v_1 + \underset{\smile}{1}\, v_2 + \underset{\smile}{0}\, v_3 + \dots + \underset{\smile}{0}\, v_n$$

...

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Esempio $\quad V = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$

Si consideri la funzione $id: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\qquad (x,y) \longmapsto (x,y)$

Si calcolino le matrici:

$${}_{can}M_{can}(id), \quad {}_{B}M_{B}(id), \quad {}_{B}M_{can}(id), \quad {}_{can}M_{B}(id)$$

Da quello che abbiamo appena visto,

$${}_{can}M_{can}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_{B}M_{B}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{B}M_{can}(id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$C_B(id(1,0)) = C_B(1,0)$

$C_B(id(0,1)) = C_B(0,1)$

$$(1,0) = \underbrace{\tfrac{1}{2}}\,(1,1) + \underbrace{\tfrac{1}{2}}\,(1,-1)$$
$$(0,1) = \underbrace{\tfrac{1}{2}}\,(1,1) + \underbrace{\tfrac{-1}{2}}\,(1,-1)$$

$${}_{Can}M_B(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\;1\;}_{C_{Can}(id(1,1)) \,=\, C_{Can}(1,1)} \qquad \underbrace{\;-1\;}_{C_{Can}(id(1,-1)) \,=\, C_{Can}(1,-1)}$$

Dato uno spazio vettoriale V e due basi
$$B = \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$$
la matrice ${}_{B'}M_B(id)$ rappresenta la funzione identità e quindi quando moltiplico questa matrice per un vettore colonna scritto in base B, esse vettore viene riscritto in base B'!

Tornando al esempio: come scrivere un vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{can}$ in coordinate rispetto alla base B?
Basta moltiplicare ${}_{B}M_{Can}(id) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{can} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_{B}$$

Definizione La matrice ${}_{B'}M_{B}(id)$ riportata sopra è detta la matrice di cambi di base dalla base B alla base B'. Di solito scriviamo ${}_{B'}A_{B}$ per questa matrice.

osservazione: Nel nostro esempio, cosa succede se moltiplichiamo ${}_{Can}M_{B}(id) \cdot {}_{B}M_{Can}(id)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pensando alla composizione di funzioni lineari

$${}_{Can}M_{B}(id) \cdot {}_{B}M_{Can}(id) = {}_{Can}M_{Can}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>In generale</u> se abbiamo V, W, U spazi vettoriali su $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{k}=\mathbb{C}$) e due funzioni

$$f: V \longrightarrow W \quad e \quad g: W \longrightarrow U$$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

$\mathcal{D} = \{u_1, \dots, u_\ell\}$ base di U

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "C_{\mathcal{C}}"] & U \arrow[d, "C_{\mathcal{D}}"] \\
\mathbb{k}^n \arrow[r, "{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)"'] \arrow[rr, bend right] & \mathbb{k}^m \arrow[r, "{}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(g)"'] & \mathbb{k}^\ell
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{{}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(g) \cdot {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = {}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{B}}(g\circ f)}$$

dove le frecce in rosso indicano le funzioni che prendono un vettore di coordinate e lo moltiplicano per le matrici corrispondenti.

Esplicitamente

$$\boxed{C_{\mathcal{D}}\big((g\circ f)(v)\big) = \big({}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}(g)\,{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)\big)\,C_{\mathcal{B}}(v)}$$

Esempio: $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y) = (3x,\ 2y+x,\ 0)$

$g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad g(x,y,z) = (z-y,\ x+y)$

$${}_{can_2}M_{can_2}(g\circ f) = ?$$

$$= {}_{can_2}M_{can_3}(g) \cdot {}_{can_3}M_{can_2}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Consideriamo adesso $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,-1)\}$ in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo

$${}_{can_2}M_{\mathcal{B}}(g\circ f) = {}_{can_2}M_{can_3}(g)\ {}_{can_3}M_{\mathcal{B}}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$