04/05/2026

MONDO DELLE FUNZIONI LINEARI

$f : V \longrightarrow W$ funzione lineare

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

MONDO DELLE MATRICI

matrice $\underset{\text{dim } W}{m} \times \underset{\text{dim } V}{n}$

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove la colonna j $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di $f(v_j)$ in base $\mathcal{C}$

$f_T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \longmapsto \underbrace{T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}}$$

vettore di coordinate di $f(v)$ in base $\mathcal{C}$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}$$

$+\ \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $\mathbb{K}^n$ e

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di $\mathbb{K}^m$

Nel 8 aprile, si è dimostrato che se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V allora esiste un isomorfismo

$$V \xrightarrow{C_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n$$
$$v \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Coordinate di v in base $\mathcal{B}$, ovvero: $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

Se $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ è base di W, allora esiste un isomorfismo

$$W \xrightarrow{C_{\mathcal{C}}} \mathbb{K}^m, \quad w \longmapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Coordinate di w in base $\mathcal{C}$, ovvero $w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$

Quindi, partendo da una funzione lineare $f: V \to W$ con basi fissate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ come descritto sopra, abbiamo:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "C_{\mathcal{C}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_{{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)}"'] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \longmapsto {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Il quadrato di funzioni scritto su si dice commutativo nel senso che la composizione $\to \downarrow$ è uguale alla composizione $\downarrow \to$, ovvero:

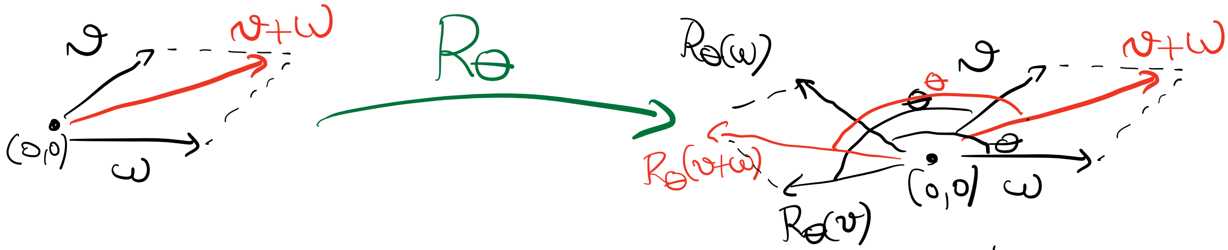
$$\boxed{C_{\mathcal{C}}(f(v)) = {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) \cdot C_{\mathcal{B}}(v)}$$

<u>Esempio</u>: Vediamo che la rotazione di vettori in $\mathbb{R}^2$ (o anche in $\mathbb{R}^n$) per un angolo fissato è un'operazione lineare:

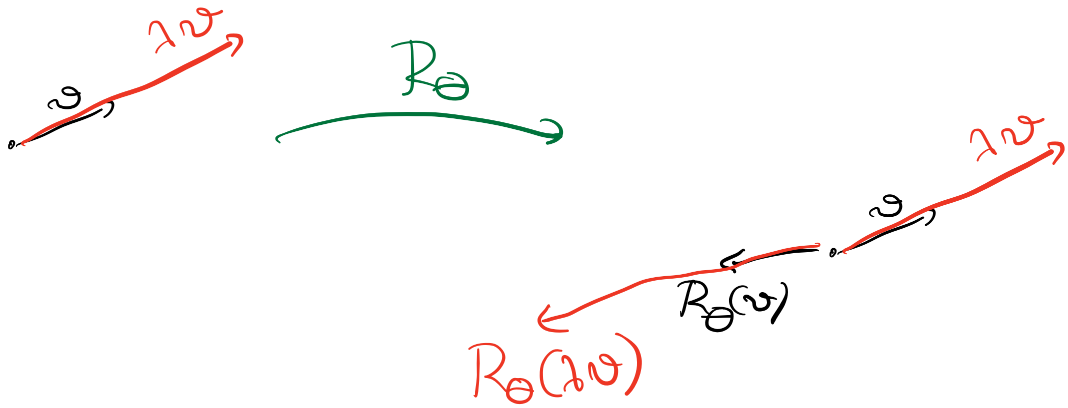
Chiamo alla funzione di rotazione intorno a $(0,0)$ di angolo θ, R_θ.

linearità di R_θ: a) $R_\theta(v+w) = R_\theta(v) + R_\theta(w)$

b) $R_\theta(\lambda v) = \lambda R_\theta(v)$



Tutto il parallelogramma viene ruotato e quindi
$R_\theta(v+w) = R_\theta(v) + R_\theta(w)$



Siccome la rotazione non cambia la lunghezza dei vettori,

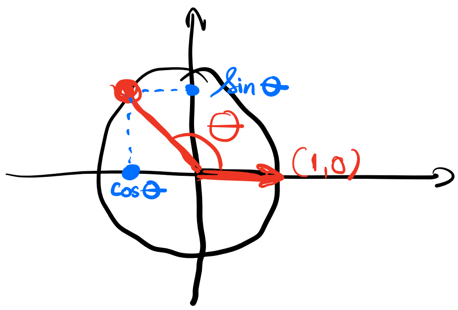
$R_\theta(\lambda v) = \lambda R_\theta(v)$.

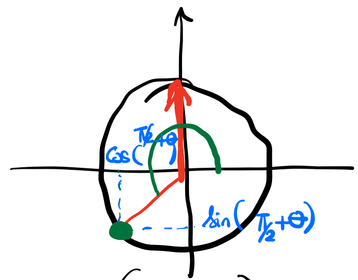
Per capire come opera R_θ in un vettore (x,y) di $\mathbb{R}^2$, troviamo la matrice associata a R_θ rispetto alla base canonica in $\mathbb{R}^2$.

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$_{Can}M_{Can}(R_\theta) = ?$$

La prima colonna è $R_\theta((1,0))$ scritto in coordinate rispetto a Can.





La seconda colonna è $R_\theta((0,1))$ scritto in coordinate rispetto a can.

Quindi $$_{Can}M_{Can}(R_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos(\pi/2+\theta) \\ \sin\theta & \sin(\pi/2+\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Per esempio $\theta = \frac{\pi}{3}$

$R_{\pi/3}$ ha matrice associata $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Allora avendo la matrice, se voglio sapere $R_\theta(5,3)$, basta moltiplicare la matrice per le coordinate di $(5,3)$ in base canonica.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Per un vettore (x, y) in $\mathbb{R}^2$,

$$R_\theta(x,y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \, , \, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

Adesso, cerchiamo di capire cosa succede alla composizione di funzioni lineari tramite la loro interpretazione matriciale.

Fissiamo basi canoniche in $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^p$ per n, m e p interi positivi e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Componiamo una funzione lineare

$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ con una funzione lineare

$g: \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^m$. Nota: Ha senso considerare la composizione $g \circ f$ poichè il dominio di g coincide con il codominio di f (ovvero sono entrambi $\mathbb{K}^p$).

$$g \circ f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

Osserviamo che la composizione di funzioni lineari è ancora lineare!

$$g \circ f(v+w) = g\big(f(v+w)\big) \overset{f \text{ è lineare}}{=} g\big(f(v)+f(w)\big)$$

$$\underset{g \text{ è lineare.}}{=} g\big(f(v)\big) + g\big(f(w)\big)$$

$$= g \circ f(v) + g \circ f(w)$$

$$g \circ f(\lambda v) = g\big(f(\lambda v)\big) \underset{f \text{ è lineare}}{=} g\big(\lambda f(v)\big)$$

$$\underset{g \text{ è lineare}}{=} \lambda\, g\big(f(v)\big)$$

$$= \lambda\, g \circ f(v)$$

Allora si conferma che $g \circ f$ è lineare.

Supponiamo adesso che

$${}_{Can}M_{Can}(f) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{matrice } p \times n$$

$${}_{Can}M_{Can}(g) = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \quad \text{matrice } m \times p$$

Domanda: $\quad {}_{Can}M_{Can}(g \circ f) = ?$ matrice $m \times n$.

Per calcolare una colonna j di questa matrice, devo calcolare $g \circ f$ nel j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{K}^n$ (spazio dominio di $g \circ f$).

Vediamo per $j=1$

$$g \circ f(1,0,0,\dots,0) = g\Big(\underbrace{f(1,0,0,\dots,0)}_{\substack{1^a \text{ colonna di } {}_{Can}M_{Can}(f) \\ \text{ovvero } \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p_1} \end{pmatrix}}}\Big)$$

Quindi $g(a_{1_1},\dots,a_{p_1})$ è il vettore che cerchiamo, ovvero il prodotto

$$ {}_{Can}M_{Can}(g)\begin{pmatrix} a_{1_1} \\ \vdots \\ a_{p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \\ b_{m_1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p_1} \end{pmatrix}}_{C_1^A} $$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{2_1} + \dots + b_{1p}a_{p_1} \\ \vdots \\ b_{m_1}a_{11} + b_{m_2}a_{2_1} + \dots + b_{mp}a_{p_1} \end{pmatrix}$$

In altre parole, se io scrivo C_1^A per la prima colonna di A e se scrivo R_i^B per la i-esima riga di B, il vettore risultante è:

$$g \circ f(1,0,0,\dots 0) = \begin{pmatrix} R_1^B \cdot C_1^A \\ R_2^B \cdot C_1^A \\ \vdots \\ R_m^B \cdot C_1^A \end{pmatrix}_{Can}.$$

Proseguendo così per ogni singola colonna, ottengo la matrice

$$ {}_{Can}M_{Can}(g \circ f) = \underbrace{\begin{pmatrix} R_1^B \cdot C_1^A & R_1^B \cdot C_2^A & \cdots & R_1^B \cdot C_n^A \\ R_2^B \cdot C_1^A & R_2^B \cdot C_2^A & & R_2^B \cdot C_n^A \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_m^B \cdot C_1^A & R_m^B \cdot C_2^A & \cdots & R_m^B \cdot C_n^A \end{pmatrix}}_{\text{questa matrice viene definita come il prodotto B per A e scriviamo BA.}}$$

l'entrata ij di questa matrice è $R_i^B \cdot C_j^A$

Esempio: Consideriamo le funzioni lineari

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e
$(x,y,z) \longmapsto (y-z, 2x+3y+4z)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \longmapsto (-x-y, 2y)$

Calcolare ${}_{Can}M_{Can}(f)$, ${}_{Can}M_{Can}(g)$ e ${}_{Can}M_{Can}(g\circ f)$.

- $${}_{Can}M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$f(1,0,0)$ $\quad$ $f(0,1,0)$ $\quad$ $f(0,0,1)$

- $${}_{Can}M_{Can}(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$g(1,0)$ $\quad$ $g(0,1)$

- ${}_{Can}M_{Can}(g\circ f) = ?$

$$g\circ f(x,y,z) = g\big(f(x,y,z)\big) = g(y-z,\, 2x+3y+4z)$$

$$= \big(-(y-z)-(2x+3y+4z),\, 2(2x+3y+4z)\big)$$

$$= (-4y-3z-2x,\, 4x+6y+8z)$$

$$ {}_{Can}M_{Can}(g\circ f) = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} $$

$$ \underbrace{\qquad\qquad}_{g\circ f(1,0,0)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{g\circ f(0,1,0)} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{g\circ f(0,0,1)} $$

Però abbiamo appena visto che

$$ {}_{Can}M_{Can}(g\circ f) = \left({}_{Can}M_{Can}(g)\right) \cdot \left({}_{Can}M_{Can}(f)\right) $$

$$ = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}} $$

$$ = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -1.0+(-1).2 & -1.1+(-1).3 & (-1)(-1)+(-1).4 \\ 0.0+2.2 & 0.1+2.3 & 0.(-1)+2.4 \end{pmatrix}} $$

$$ = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} $$

Definizione (Prodotto di matrici) Data una matrice B $m \times p$ e una matrice A $p \times n$, possiamo definire il prodotto

$$BA = \begin{pmatrix} R_1^B \cdot C_1^A & R_1^B \cdot C_2^A & \cdots & R_1^B \cdot C_n^A \\ R_2^B \cdot C_1^A & R_2^B \cdot C_2^A & & R_2^B \cdot C_n^A \\ \vdots & & & \\ R_m^B \cdot C_1^A & R_m^B \cdot C_2^A & \cdots & R_m^B \cdot C_n^A \end{pmatrix}$$

$m \times n$.

Osservazione: $\underbrace{B}_{m \times p} \underbrace{A}_{p \times n}$ è una matrice $m \times n$

la coincidenza fra il numero di colonne di B e il numero di righe di A è quello che ci permette di definire $R_i^B \cdot C_j^A$