

**Esercizi per il corso di MATEMATICA**  
Corsi di laurea in Chimica e Chimica Industriale  
**Foglio 10**  
29 aprile 2026

Gli esercizi segnati con asterisco sono estratti/adattati dal libro di F. Bottacin, *Algebra Lineare e Geometria*, Società Editrice Esculapio (2021)

1. Si considerino le seguenti funzioni:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (2x + 3y, x, 2 - x)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(x, y) = (2x, x, y - x)$$

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad h(x, y) = (xy, y, x)$$

$$k: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad k(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 2y - 2z)$$

$$m: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad m(x, y, z) = (2x - y + z, x - z, 2y + z)$$

$$n: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad n(x, y, z) = (1, x, y)$$

- (a) Per ognuna delle funzioni si determini se la funzione è lineare.
  - (b) Per ogni funzione lineare trovata, si indichi se è un isomorfismo o no.
  - (c) Per ogni funzione lineare trovata, si determinino basi per il nucleo e per l'immagine.
  - (d) Si indichi quali funzioni lineari sono iniettive e quali funzioni lineari sono suriettive.
2. Si consideri la funzione  $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  definita da  $g(x, y, z) = (x - y, x + y - z, 2x, z - 2y)$ .
- (a) Si verifichi che  $g$  è una funzione lineare.
  - (b)  $g$  è un isomorfismo? Perché?
  - (c) Si determini una base per il nucleo e per l'immagine.
  - (d) La funzione  $g$  è iniettiva? Perché?
  - (e) La funzione  $g$  è suriettiva? Perché?
3. Si consideri  $V = \mathbb{C}$  come spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Ricordiamoci che  $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ . Si consideri la funzione  $\phi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $\phi(z) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ , dove  $\operatorname{Re}(z)$  è la parte reale di  $z$  e  $\operatorname{Im}(z)$  è la parte immaginaria di  $z$ .
- (a) Si dimostri che  $\phi$  è un isomorfismo di spazi vettoriali su  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Si determini la funzione inversa di  $\phi$  (ricordiamo che tale funzione inversa è automaticamente lineare).
  - (c) Si dimostri che  $\mathcal{B} = \{(1, 1), (2, -1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^2$ .
  - (d) Partendo dalla base  $\mathcal{B}$  e usando l'isomorfismo  $\phi^{-1}$ , si determini una base  $\mathcal{B}'$  di  $\mathbb{C}$  su  $\mathbb{R}$ .
  - (e) Si determinino le coordinate di  $\omega = 3 + 2i$  rispetto alla base  $\mathcal{B}'$ .
4. Si consideri la funzione lineare  $h: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  definita da

$$h(x, y, z, t) = (2x + y - t, t + y, 3x + 2y + z + t, t + z + x)$$

- (a) Si determini una base per  $N(h)$ .
- (b) Si determini una base per  $\operatorname{Im}(h)$ .
- (c)  $h$  è iniettiva e/o suriettiva? Perché?

- (d) Si trovi una base  $\mathcal{B}$  per un complemento per  $N(h)$  in  $\mathbb{R}^4$ .
- (e) Si dimostri che l'immagine dei vettori in  $\mathbb{B}$  tramite  $h$  costituiscono una base di  $\text{Im}(h)$ .
5. Si dimostri, usando il teorema *Nulità + Rango* che le seguenti affermazioni su una funzione lineare  $f: V \rightarrow W$  su  $\mathbb{K}$  sono equivalenti.<sup>1</sup>
- (a)  $f$  è un isomorfismo;
- (b)  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$  e  $f$  è suriettiva;
- (c)  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$  e  $f$  è iniettiva.
6. Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  una funzione lineare definita da  $f(x, y, z) = (y, y + x - z, 3y, z - x)$
- (a) Si trovi la matrice di  $f$  rispetto alle basi canoniche nel dominio e nel codominio.
- (b) Si verifichi che  $B = \{(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- (c) Si trovi la matrice di  $f$  rispetto alla base  $B$  nel dominio e alla base canonica nel codominio.
7. Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare tale che  $f(1, 1, 0, 0) = (3, 1, 2)$ ,  $f(1, 0, 1, 0) = (2, 0, 2)$ ,  $f(0, 1, 0, 0) = (-1, -2, 1)$  e  $f(0, 0, 1, 1) = (1, -1, 2)$ .
- (a) Si verifichi che i vettori di  $\mathbb{R}^4$  elencati costituiscono una base, che chiameremo  $B$ .
- (b) Si scriva l'espressione generale della funzione lineare  $f$  per un vettore  $(x, y, z, t)$ .
- (c) Si scriva la matrice di  $f$  rispetto alla base  $B$  nel dominio e alla base canonica nel codominio.
- (d) Si scriva la matrice di  $f$  rispetto alle base canoniche sia nel dominio che nel codominio.
8. Sia  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una funzione lineare tale che  $f(-1, 2, 0) = (0, 1, 2)$ ,  $f(1, 0, 1) = (1, 0, 2)$  e  $f(-2, -1, 1) = (1, -1, 0)$ .
- (a) Si verifichi che i vettori  $\{(-1, 2, 0), (1, 0, 1), (-2, -1, 1)\}$  costituiscono una base di  $\mathbb{R}^3$ , che chiameremo  $B$ .
- (b) Si trovi la matrice associata ad  $f$  rispetto alle seguenti basi:
- alla base  $B$  nel dominio e alla base canonica nel codominio;
  - alla base  $B$  sia nel dominio che nel codominio;
  - alla base canonica sia nel dominio che nel codominio.

9. Si considerino le matrici  $A, B, C$  e i vettori  $u, v, w$  su  $\mathbb{R}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino i vettori  $Au$ ,  $Bv$  e  $Cw$ .

10. (a) Si dimostri che  $\mathcal{B} := \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, -1, 0), (1, 1, 1, -1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^4$ .

<sup>1</sup>Si dimostri che "Se (1), allora (2)", che "Se (2), allora (3)" e che "Se (3) allora (1)"

- (b) Si trovi l'espressione generale della funzione lineare  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  unicamente definita dalle proprietà

$$\begin{aligned}f(1,0,0,0) &= (2,0,1) & f(1,1,0,0) &= (1,1,1) \\f(1,1,-1,0) &= (0,0,-1) & f(1,1,1,-1) &= (2,0,-2)\end{aligned}$$

- (c) Si dimostri che  $\mathcal{C} := \{(1,0,1), (0,1,0), (-1,0,1)\}$  è una base di  $\mathbb{R}^3$ .
- (d) Si considerino le basi canoniche  $\text{can}_4$  di  $\mathbb{R}^4$  e  $\text{can}_3$  di  $\mathbb{R}^3$ . Si calcolino le seguenti matrici.
- ${}_{\text{can}_3}M_{\mathcal{B}}(f)$
  - ${}_C M_{\mathcal{B}}(f)$
  - ${}_{\text{can}_3}M_{\text{can}_4}(f)$
  - ${}_C M_{\text{can}_4}(f)$ .

11. Sia  $V$  lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale  $y'' - y = 0$  e sia  $W$  lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 1.

- Si verifichi che  $\mathcal{B} := \{e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}\}$  è una base di  $V$ .
- Si verifichi che  $\mathcal{C} := \{x, 1 + x\}$  è una base di  $W$ .
- Si determini le coordinate di  $e^x$  e di  $e^{-x}$  rispetto alla base  $\mathcal{B}$ .
- Sia  $f: V \rightarrow W$  la funzione che ad una soluzione di  $y'' - y = 0$  della forma  $k_1 e^x + k_2 e^{-x}$  associa il polinomio  $k_1 + k_2 x$ .
  - Si verifichi che  $f$  è lineare.
  - Si verifichi che  $f$  è un isomorfismo.
  - Si determini la matrice  ${}_C M_{\mathcal{B}}(f)$  associata ad  $f$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ .
  - Si usi  ${}_C M_{\mathcal{B}}(f)$  per calcolare le coordinate di  $f(e^x)$  e di  $f(e^{-x})$  rispetto alla base  $\mathcal{C}$ .