28/04/2026

- Quante funzioni $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfano $f(1) = 2$?
- Quante funzioni lineari $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soddisfano $f(1) = 2$?

Esempi di funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(1) = 2$:

$$f(x) = 2x$$
$$f(x) = x+1$$
$$f(x) = 3-x$$
$$f(x) = x^2+1$$
$$f(x) = 2^x$$

$f(x) = x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$

Quindi alla prima domanda rispondiamo: infinite funzioni!

$f(x) = x+1$ è lineare?

$$f(x+y) \overset{?}{=} f(x) + f(y)$$

$$f(x+y) = x+y+1$$
$$f(x) + f(y) = x+1 + y+1 = x+y+2$$

non è lineare

Anche $f(x) = 3-x$ non è lineare

Però $f(x) = 2x$ è lineare.

Ci sono altre?

Supponiamo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare tale che $f(1) = 2$. Siccome f è lineare $f(0) = 0$. Sappiamo anche che $\operatorname{Im}(f)$ ha dimensione 0 o 1 (essendo un sottospazio di $\mathbb{R}$), ma siccome $f(1) = 2 \neq 0$, abbiamo che $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$ e quindi $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$. Quindi la funzione è suriettiva! Inoltre dal teorema nullità + rango, la funzione ha $\dim \ker(f) + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(f)}_{1} = 1$

e quindi $\dim \ker(f) = 0$, ovvero f è iniettiva.
Allora f è un isomorfismo!
Si può dimostrare infatti che se f è lineare, il suo grafico è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con dimensione uguale $\dim \operatorname{Im}(f) = 1$ $\rightsquigarrow$ grafico è una retta passante nell'origine. (esercizio).
Allora si conclude che, siccome esiste una sola retta passante nell'origine e nel punto $(1,2)$ in $\mathbb{R}^2$, esiste un'unica funzione lineare $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 2$.

Teorema: Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V.
Per ogni scelta $w_1, \dots, w_n$ in W esiste un'unica funzione lineare $f: V \longrightarrow W$ tale che

$$\begin{aligned} f(v_1) &= w_1 \\ f(v_2) &= w_2 \\ &\vdots \\ f(v_n) &= w_n \end{aligned}$$

Dimostrazione: Esistenza: Dato un vettore v in V esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ che scrivono v in modo unico come combinazione lineare dei vettori in $\mathcal{B}$: le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$!

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Definisco $f(v) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$.

Vediamo adesso che questo definisce una funzione lineare $V \longrightarrow W$. Prendiamo

$$u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$
$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$
vettori in V.

$$f(u+v) = f\left((\alpha_1+\beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n) v_n\right)$$
$$= (\alpha_1+\beta_1) w_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n) w_n$$

$$f(u) + f(v) = \underbrace{\left(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n\right)}_{f(u)} + \underbrace{\left(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\right)}_{f(v)}$$

Quindi si ha $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

$$f(\lambda v) = f\left(\lambda \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda \alpha_n v_n\right)$$
$$= \lambda \alpha_1 w_1 + \dots + \lambda \alpha_n w_n$$
$$\lambda f(v) = \lambda \left(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\right)$$

Quindi $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

e allora f è lineare.

$$f(v_1) = f(1 \cdot v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n)$$
$$= 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 0 \cdot w_n = w_1$$

Analogamente, $f(v_i) = w_i$. Quindi abbiamo dimostrato l'esistenza di una tale funzione lineare!

Dimostriamo adesso che questa funzione lineare che abbiamo appena costruito è l'unica che soddisfa $f(v_1) = w_1$, $\dots$, $f(v_n) = w_n$.

Supponiamo che $g: V \longrightarrow W$ è un'altra funzione lineare con la stessa proprietà.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$g(v) \underset{\substack{\downarrow \\ g \text{ è lineare}}}{=} \alpha_1 g(v_1) + \dots + \alpha_n g(v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$
$$= f(v)$$

Quindi g è uguale a f, e f è unica! ∎

<u>Esempio</u> Si determini l'unica funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che soddisfa

$$f(1,0,0) = (2,1)$$
$$f(0,1,0) = (-1,-1)$$
$$f(0,0,1) = (2,4)$$

$$f(x,y,z) = ?$$

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$f(x,y,z) = x(2,1) + y(-1,-1) + z(2,4)$$
$$= (2x - y + 2z,\ x - y + 4z)$$

<u>Esempio</u> Si trovi l'espressione dell'unica funzione lineare $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(1,1) = (3,0)$
$f(-1,1) = (2,4)$

Osserviamo per prima che $\mathcal{B}=\{(1,1),(-1,1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Quindi se voglio calcolare $f(x,y)$, devo scrivere (x,y) in coordinate rispetto a $\mathcal{B}$.

$$(x,y) = \alpha(1,1) + \beta(-1,1)$$

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = x + \beta \\ y = x + 2\beta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = x + \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{y-x}{2} \end{cases}$$

$$(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(x,y) = f\left(\frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{y-x}{2}(-1,1)\right)$$

$$= \frac{x+y}{2}\underbrace{(3,0)}_{f(1,1)} + \frac{y-x}{2}\underbrace{(2,4)}_{f(-1,1)}$$

$$= \left(\frac{3x+3y}{2}, 0\right) + \left(\frac{2y-2x}{2}, \frac{4y-4x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x+5y}{2}, 2y-2x\right)$$

Sia $f: V \longrightarrow W$ una funzione lineare e fissiamo una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ in V e una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ in W.

Il teorema ci dice che se conosciamo le immagini di $v_1, \dots, v_n$ allora conosciamo tutta la funzione f.

$$f(v_1) = a_{11} w_1 + \dots + a_{m_1} w_m$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = a_{1n} w_1 + \dots + a_{m_n} w_m$$

Quindi, conoscendo a_{ij} $(1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n)$, riusciamo a ricostruire tutta la funzione f.

Scriviamo questi scalari in una matrice $m \times n$

$$\underbrace{{}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

↳ matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ del dominio e la base $\mathcal{C}$ del codominio.

In questa matrice la colonna j mi da le coordinate di $f(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Esempi: (1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(1,0,0) = (2,1)$$
$$f(0,1,0) = (-1,-1)$$
$$f(0,0,1) = (2,4)$$

Si scriva la matrice associata ad f rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e

$\mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$.

$$f(1,0,0) = \underbrace{2}\,(1,0) + \underbrace{1}\,(0,1)$$
$$f(0,1,0) = \underline{-1}\,(1,0) + \underline{(-1)}\,(0,1)$$
$$f(0,0,1) = \underline{2}\,(1,0) + \underbrace{4}\,(0,1)$$

$$f(x,y,z) = (2x-y+2z,\ x-y+4z)$$

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad f(1,1) = (3,0)$
$\qquad f(-1,1) = (2,4)$

$\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$ $\qquad \mathcal{C} = \{(1,0), (0,1)\}$

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Domanda : $${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{}_{f(1,0)} & \underbrace{}_{f(0,1)} \end{array}$$

Siccome $f(x,y) = \left(\frac{5y+x}{2}, 2y-2x\right)$

abbiamo $f(1,0) = \left(\frac{1}{2}, -2\right)$

$f(0,1) = \left(\frac{5}{2}, 2\right)$

Vogliamo adesso capire come ricuperare la funzione f (ovvero la sua espressione generale) da queste

Matrici!

Definizione: (Prodotto di una matrice per un vettore colonna)

Sia $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ e consideriamo una matrice $m \times n$ su $\mathbb{k}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ e un vettore colonna v in $\mathbb{k}^n$: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Allora il prodotto di A per v è definito come un vettore $m \times 1$ in $\mathbb{k}^m$ nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{n \text{ coordinate}} \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \cdots + a_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}}_{m \text{ coordinate}}$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione: Data una matrice A $m \times n$ con entrate in $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{k} = \mathbb{C}$), posso definire una funzione $f_A : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m$, con $f_A(v) = Av$