29/04/2026

MONDO DELLE FUNZIONI LINEARI

$f : V \longrightarrow W$ funzione lineare

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

MONDO DELLE MATRICI

matrice $\underset{\dim W}{m} \times \underset{\dim V}{n}$

$${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove la colonna j $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ è il vettore delle coordinate di $f(v_j)$ in base $\mathcal{C}$

$$f_B : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m \longleftarrow\!\!\!| \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{can} \longmapsto Bv = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 + \cdots + b_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{m1}\alpha_1 + \cdots + b_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}_{can} \in \mathbb{k}^m$$

Vediamo che f_B è una funzione lineare!

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \qquad f_B(v+u) = f_B(v) + f_B(u) \; ?$$

$$\lambda \in \mathbb{k} \qquad f_B(\lambda v) = \lambda f_B(v) \; ?$$

$$f_B(v+u) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(\alpha_1+\beta_1) + b_{12}(\alpha_2+\beta_2) + \cdots + b_{1n}(\alpha_n+\beta_n) \\ \vdots \\ b_{m1}(\alpha_1+\beta_1) + b_{m2}(\alpha_2+\beta_2) + \cdots + b_{mn}(\alpha_n+\beta_n) \end{pmatrix}$$

$$f_B(v)+f_B(u)=\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1+b_{12}\alpha_2+\dots+b_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ b_{m1}\alpha_1+\dots+b_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}}_{f_B(v)}+\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11}\beta_1+b_{12}\beta_2+\dots+b_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ b_{m1}\beta_1+b_{m2}\beta_2+\dots+b_{mn}\beta_n \end{pmatrix}}_{f_B(u)}$$

$$=\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1+\dots+b_{1n}\alpha_n+b_{11}\beta_1+\dots b_{1n}\beta_n \\ \vdots \\ b_{m1}\alpha_1+\dots+b_{mn}\alpha_n+b_{m1}\beta_1+\dots+b_{mn}\beta_n \end{pmatrix}$$

Quindi abbiamo $f_B(u+v)=f_B(u)+f_B(v)$

$$f_B(\lambda v)=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}\lambda\alpha_1+b_{12}\lambda\alpha_2+\dots+b_{1n}\lambda\alpha_n \\ \vdots \\ b_{m1}\lambda\alpha_1+b_{m2}\lambda\alpha_2+\dots+b_{mn}\lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda(b_{11}\alpha_1+\dots+b_{1n}\alpha_n) \\ \vdots \\ \lambda(b_{m1}\alpha_1+\dots+b_{mn}\alpha_n) \end{pmatrix}$$

$$=\lambda\begin{pmatrix} b_{11}\alpha_1+\dots+b_{1n}\alpha_n \\ \\ b_{m1}\alpha_1+\dots+b_{mn}\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$=\lambda f_B(v)$$

Allora f_B è lineare.

Osservazione: f_B è definita avendo scelto una base in $\mathbb{K}^n$ e una base in $\mathbb{K}^m$ in modo ad esprimere i vettori in coordinate rispetto a tali basi.

<u>Domanda</u>: Come ricostruire una funzione lineare $f: V \longrightarrow W$ dalla sua matrice ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$?

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \qquad {}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$$

$v \in V$

$$f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \quad \text{dove} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = v$$

$$= f(\alpha_1 v_1) + \cdots + f(\alpha_n v_n)$$

poichè f è lineare

$$= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n) \qquad f(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$= \alpha_1(a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \cdots + a_{m1} w_m) + \cdots + \alpha_n(a_{1n} w_1 + \cdots + a_{mn} w_m)$$

$$= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n}) w_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \cdots + \alpha_n a_{mn}) w_m$$

$$\text{Allora } f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \cdots + \alpha_n a_{mn} \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

<u>In riassunto</u>: Per calcolare $f(v)$ usando la matrice ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$:

① Calcolare le coordinate $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ di v

in base $\mathcal{B}$

(2) Moltiplicare ${}_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{B}}(f)$ per $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

(3) Interpretare il risultato come essendo l'espressione di $f(v)$ in coordinate rispetto alla base $\mathcal{C}$.

Esempio: Consideriamo la base $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$ di $\mathbb{R}^2$. Per una certa funzione lineare $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ abbiamo $f(1,1) = (1,0,0)$ e $f(-1,1) = (0,1,1)$.

a) Si determini la matrice ${}_{Can}M_{\mathcal{B}}(f)$.

b) Si determini $f(x,y)$ per ogni (x,y) in $\mathbb{R}^2$.

a) $${}_{Can}M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Scriviamo (x,y) in coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$

Come visto ieri $$(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Allora $$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{y-x}{2} \\ \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$