27/04/2026

Ripasso sulle funzioni lineari fra spazi vettoriali:

Quale delle seguenti funzioni sono lineari?

1. $c: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $c(z) = |z|$ è lineare su $\mathbb{C}$. — No! Sappiamo che $|z_1+z_2| \neq |z_1|+|z_2|$ in generale! Infatti, per esempio $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $|1|+|i| = 1+1 = 2$.
2. ✓ $e: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $e(z) = Re(z)$ è lineare su $\mathbb{R}$. — Sì! $Re(z_1+z_2) = Re(z_1)+Re(z_2)$ dalla definizione di somma dei numeri complessi. Inoltre, se $\lambda \in \mathbb{R}$, $Re(\lambda(a+bi)) = Re(\lambda a + \lambda bi) = \lambda a = \lambda Re(a+bi)$, come volevamo!
3. $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $f(z) = Re(z)$ è lineare su $\mathbb{C}$. — No! Nonostante $Re(z_1+z_2) = Re(z_1)+Re(z_2)$, se λ è uno scalare complesso non è sempre vero che $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$. Infatti, per esempio, $\lambda = i$, $z = 1$ $Re(i \cdot 1) = 0$ e $i \cdot Re(1) = i$.
4. ✓ $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $h(x,y) = (0, x-y, 0)$ è lineare su $\mathbb{R}$. — Sì! $h((a,b)+(c,d)) = h(a+c, b+d) = (0, a+c-(b+d), 0) = (0, (a-b)+(c-d), 0) = (0, a-b, 0) + (0, c-d, 0) = h(a,b) + h(c,d)$
$h(\lambda(a,b)) = h(\lambda a, \lambda b) = (0, \lambda a - \lambda b, 0) = \lambda(0, a-b, 0) = \lambda h(a,b)$.
5. ✓ $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $g(x,y) = (y, x+y)$ (su $\mathbb{R}$). — Sì! $g((a,b)+(c,d)) = g(a+c, b+d) = (b+d, (a+c)+(b+d)) = (b, a+b) + (d, c+d) = g(a,b) + g(c,d)$
$g(\lambda(a,b)) = (\lambda b, \lambda a + \lambda b) = \lambda(b, a+b) = \lambda g(a,b)$.

Quale delle seguenti funzioni lineari sono isomorfismi?

1. $e: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $e(z) = Re(z)$ (su $\mathbb{R}$). — No! Non è suriettiva. Per esempio, $\underbrace{Re(z)}_{\text{è sempre un numero reale!}} \neq i$ $\forall z \in \mathbb{C}$
2. ✓ $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $g(x,y) = (y, x+y)$ (su $\mathbb{R}$). — Sì! Infatti, dato $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ x+y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a \\ x = b-a \end{cases}$ e quindi abbiamo un candidato per funzione inversa: $g^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(a,b) \longmapsto (b-a, a)$.
Si verifica che $g \circ g^{-1} = Id_{\mathbb{R}^2}$ e $g^{-1} \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$
3. $h: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ $h(x,y) = (0, x-y, 0)$ (su $\mathbb{C}$). — No! Non è iniettiva: per esempio $h(1,1) = h(2,2) = (0,0,0)$.

Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x,y,z,t) = (x+2y+3z, y+z+2t, 2x+5y+7z+2t)$. Una base per $Im(f)$ è:

1. $\{(1,0,0),(2,1,0)\}$
2. ✓ $\{(1,0,2),(2,1,5)\}$
3. $\{(1,0,2),(2,1,5),(3,1,7)\}$
4. $\{(1,0,2)\}$

I vettori nell'immagine di f sono della forma
$$(x+2y+3z, y+z+2t, 2x+5y+7z+2t) =$$
$$= x(1,0,2) + y(2,1,5) + z(3,1,7) + t(0,2,2),$$
Quindi $Im(f) = \langle (1,0,2),(2,1,5),(3,1,7),(0,2,2) \rangle$.
Mettendo questi vettori nelle righe di una matrice, sappiamo che la forma ridotta di tale matrice ci da una base dello spazio generato dalle righe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 2R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

base di $Im(f)$

anche $\{(1,0,2),(2,1,5)\}$ è una base poiché non abbiamo scambiato righe!

Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x,y,z,t) = (x+2y+3z, y+z+2t, 2x+5y+7z+2t)$. Una base per $Ker(f)$ è:

1. ✓ $\{(-1,-1,1,0),(4,-2,0,1)\}$
2. $\{(2,5,7,2)\}$
3. $\{(0,1,1,2),(2,5,7,2)\}$
4. $\{(-1,-1,1,0),(1,1,-1,0)\}$

$$ker(f) = \{(x,y,z,t) : f(x,y,z,t) = (0,0,0)\}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z = 0 \\ y+z+2t = 0 \\ 2x+5y+7z+2t = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

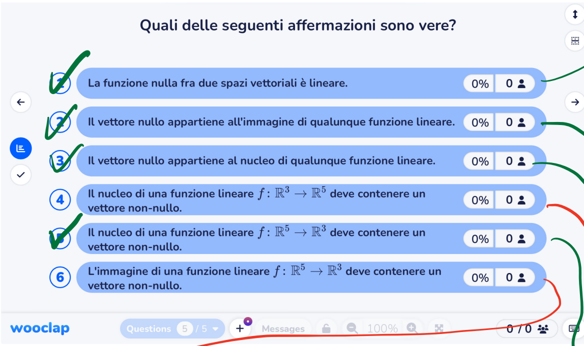
z, t libere!

Base data da $z=1, t=0$ e $z=0, t=1$

$$z=1, t=0 \rightsquigarrow \begin{cases} x+2y+3 = 0 \\ y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \rightsquigarrow (-1,-1,1,0)$$

$$z=0, t=1 \rightsquigarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ y+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \rightsquigarrow (4,-2,0,1).$$

Quindi $ker(f)$ ha base $\{(-1,-1,1,0),(4,-2,0,1)\}$



1. $f(v)=0$ per ogni v è chiaramente lineare:
$f(v_1+v_2) = 0 = 0+0 = f(v_1)+f(v_2)$
$f(\lambda v_1) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda f(v_1)$

2. $f(0_V) = 0_W$ e, quindi, $0_W \in \mathrm{Im}(f)$

3. $f(0_V) = 0_W$ e, quindi $0_V \in \ker(f)$

4. No! Esempio $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$, $(x,y,z) \longmapsto (x,y,z,0,0)$ ha per nucleo soltanto $\{(0,0,0)\}$

5. $\dim \ker(f) + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(f)}_{\leq 3} = 5$

≤ 3 poiché $\mathrm{Im}(f)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Quindi $\dim \ker(f) \geq 2$ e $\ker(f)$ deve contenere un elemento non-nullo!

6. No! Per esempio la funzione nulla ha per immagine il sottospazio nullo.

⚠ Data del Terzo compitino = Data del I° appello = 23/06/2026

Teorema ("Nullità + Rango") Sia $f: V \longrightarrow W$ una funzione lineare, dove V e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$). Se $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, allora

$$\boxed{\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = n}$$

Oss.: $\ker(f)$ e $N(f)$ sono due notazioni per lo stesso concetto: il nucleo di f!

Dimostrazione: Ricordiamo che $\ker(f)$ è un sottospazio di V. Quindi $\dim_{\mathbb{K}} \ker(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} V = n$. Supponiamo allora che $\dim \ker(f) = m \leq n$, ovvero $\ker(f)$ ammette una base $\{v_1, \dots, v_m\}$. Sappiamo di essere possibile (per esempio tramite il teorema dello scambio) completare questa base ad una base di V, cioè,

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\text{base di } \ker(f)}, \underbrace{v_{m+1}, \dots, v_n}_{\text{vettori che aggiungiamo a base di } \ker(f).}\}$$

Dimostreremo adesso che $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $\mathrm{Im}(f)$. Questo finirà la dimostrazione poichè allora la dimensione di $\mathrm{Im}(f)$ sarà proprio $n-m$.

- Vediamo che $\langle f(v_{m+1}), \dots, f(v_n) \rangle = \mathrm{Im}(f)$.

Prendiamo allora un vettore w in $\mathrm{Im}(f)$. Siccome $w \in \mathrm{Im}(f)$ allora esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$. Adesso siccome $\mathcal{B}$ è una base di V, v è combinazione lineare degli elementi in $\mathcal{B}$, ovvero, esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Abbiamo

$$w = f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$$

f è lineare!

$$= \alpha_1 \underset{0_W}{\underset{\parallel}{f(v_1)}} + \dots + \alpha_m \underset{0_W}{\underset{\parallel}{f(v_m)}} + \alpha_{m+1} f(v_{m+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n)$$

poichè $v_1, \dots, v_m \in \ker(f)$

$$= \alpha_{m+1} f(v_{m+1}) + \dots + \alpha_n f(v_n).$$

Quindi $\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_{m+1}), \dots, f(v_n) \rangle$

- Vediamo adesso che $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ sono l.i.

$$\underbrace{\beta_{m+1} f(v_{m+1}) + \dots + \beta_n f(v_n)}_{\parallel} = 0$$

f è lineare

$$f(\beta_{m+1} v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n)$$

Quindi si ha $\beta_{m+1} v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n \in \ker(f)$.

Allora questo vettore è una combinazione lineare della base di $\ker(f)$, ovvero esistono $\beta_1, \dots, \beta_m$ scalari tali che

$$\beta_{m+1} v_{m+1} + \dots + \beta_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$$

$$\Leftrightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m - \beta_{m+1} v_{m+1} - \dots - \beta_n v_n = 0$$

Siccome $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, si ha per indipendenza lineare che $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0$.

Allora $f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)$ sono l.i. come volevamo dimostrare.

$\blacksquare$

<u>Osservazione</u>: Questa dimostrazione ci da un ulteriore modo per calcolare una base di $\operatorname{Im}(f)$:

1. Calcolare una base di $\ker(f)$: $\{v_1, \dots, v_m\}$
2. Completare la base di $\ker(f)$ ad una base di V.
$$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$
3. Una base di $\operatorname{Im}(f)$ è $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$

<u>Esempio</u>: Si consideri la funzione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ data da $f(x,y,z) = (x-y, y-z, x-z, 2x-y-z)$. Si determinino basi per $\ker(f)$ e $\operatorname{Im}(f)$ usando l'algoritmo precedente.

<u>Passo 1</u>: Base di $\ker(f)$. Dobbiamo trovare una base per lo spazio di soluzioni di $\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ x-z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=z \\ x=z \\ 0=0 \end{cases}$.

Quindi abbiamo soluzioni : $\langle (1,1,1) \rangle$.

Passo 2 : Aggiungo un vettore $v_2 \notin \langle (1,1,1) \rangle$, per esempio $v_2 = (0,1,1)$.

Adesso aggiungo un'altro vettore $v_3 \notin \langle (1,1,1), (0,1,1) \rangle$

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(0,1,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - x \\ \boxed{z = y} \end{cases}$$

eq. cartesiana

Scegliamo allora $(0,3,1) = v_3$.

Abbiamo una base di $\mathbb{R}^3$: $\{(1,1,1), (0,1,1), (0,3,1)\}$

Passo 3 Base di $Im(f)$:

$$\{f(0,1,1), f(0,3,1)\}$$

$$= \{(-1,0,-1,-2), (-3,2,-1,-4)\}$$