Lezione 22 Aprile

Ricordo Data $f: V \to W$ lineare,

$$N(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

Vogliamo mostrare che

$$f \text{ è iniettiva} \iff N(f) = \{0_V\}.$$

Abbiamo già osservato che se f è iniettiva, allora $N(f) = 0$.

Mostriamo ora il viceversa, cioè che se $N(f) = 0$, allora f è iniettiva.

Per mostrare che f è iniettiva, fisso due vettori $v, w \in V$, suppongo che

$$f(v) = f(w) \quad (*)$$

e voglio dimostrare che $v = w$.

Da $(*)$ $f(v) = f(w)$, visto che f è lineare, ho

LINEARITÀ DI f

$$f(v) - f(w) = 0 \implies$$

$$f(v - w) = 0$$

Quindi, $v - w \in N(f)$

So che $N(f) = \{0_V\}$ per ipotesi, dunque

$$v - w = 0_V$$

cioè

$$v = w,$$

conclusione della dim. ■

<u>Esempio</u>: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (x+y, y-z, 0).$$

a) Verificare che f è lineare

b) Base di $N(f)$

c) Base di $Im(f)$.

<u>Svolgimento</u>.

a) Verificare per esercizio.

b) Calcolo $N(f) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$

Quindi deve essere

$$(x+y, y-z, 0) = (0,0,0)$$

cioè

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \end{cases}$$

Quindi: $N(f) = \{(-z,z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$= \{(\lambda,-\lambda,-\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1,-1,-1) \rangle$

Quindi, una base di $N(f)$ è $\{(1,-1,-1)\}$ perciò $\dim(N(f)) = 1$.

c) Voglio trovare una base di $Im(f)$, dunque devo studiare $Im(f)$.

$Im(f)$ consiste negli elementi (x,y,z) di $\mathbb{R}^3$ per i quali esiste $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(a,b,c) = (x,y,z).$$

cioè

$$(a+b,\, b-c,\, 0) = (x,y,z)$$

cioè

$$\begin{cases} a+b=x \\ b-c=y \\ 0=z \end{cases} \quad \begin{cases} b=x-a \\ \quad\quad\quad \Rightarrow x-a-c=y \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=x-a \\ c=x-a-y \quad (**) \\ z=0 \end{cases}$$

Come interpretiamo questo sistema? Lo interpretiamo osservando che qualunque scelta faccia di $(x,y,0)$ riesco a trovare (a,b,c) tali che il sistema $(**)$ sia soddisfatto. In altre parole, dato $(x,y,0)$, la tripletta

$$(a,\ x-a,\ x-a-y)$$

ha come immagine $(x,y,0)$. Infatti

$$f((a, x-a, x-a-y)) =$$

$$= (\cancel{a} + (x - \cancel{a}), \cancel{x} - a - (\cancel{x} - a - y), 0) =$$

$$= (x, y, 0).$$

Conclusione $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$= \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle.$$

Quindi una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$.

<u>Osservazione</u> Il calcolo di $\mathrm{Im}(f)$ può anche essere affrontato in modo diverso (anziché risolvere un sistema nelle incognite (a,b,c) come fatto prima).

L'immagine di f può essere descritta direttamente come

$$f(x,y,z) = (x+y, y-z, 0)$$

$$\overset{!}{=} (x,0,0) + (y,y,0) + (0,-z,0)$$

$$\overset{!}{=} x \cdot (1,0,0) + y(1,1,0) + z(0,-1,0).$$

Questo ci dice che un insieme di generatori (forse una base - anche se lo svolgimento precedente ci dice che in effetti possiamo togliere il "forse") di $\mathrm{Im}(f)$ è

$$\{(1,0,0), (1,1,0), (0,-1,0)\}.$$

Sono linearmente indipendenti?
Noto che

$$(1,0,0) = (1,1,0) + (0,-1,0)$$

dunque lo s.v. $\mathrm{Im}(f)$ generato da $(1,0,0), (1,1,0), (0,-1,0)$ è anche generato da

$$(1,1,0), (0,-1,0).$$

Questi due vettori sono lin. ind. perché non sono multiplo l'uno dell'altro, dunque

$$\{(1,1,0), (0,-1,0)\}$$

è una base di $\mathrm{Im}(f)$.

<u>Oss.</u> In questo esercizio, f non è né iniettiva né suriettiva,

$\dim N(f) = 1$

$\dim \mathrm{Im}(f) = 2$.

e sappiamo che $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 2+1$.

<u>Teorema</u> Sia $f: V \to W$ lineare. Se $\dim_K V = n$, allora

$$\boxed{\dim_K N(f) + \dim_K \mathrm{Im}(f) = n}$$

FORMULA DELLE DIMENSIONI.

<u>Esempi.</u> $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y).$$

Calcolare $N(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ (si può utilizzare il teorema precedente!)

Calcolo $N(f)$:

$$\begin{cases} x+y+z=0 & \Rightarrow z=-2x \\ x-y=0 & \Rightarrow x=y \end{cases}$$

$$N(f)=\{(x,x,-2x) \mid x\in\mathbb{R}\} = \langle(1,1,-2)\rangle.$$

In particolare, $N(f)$ ha dimensione 1.
Quindi, $Im(f)$ ha dimensione 2
per la formula delle dimensioni:

$$\underbrace{\dim_{\mathbb{R}} N(f)}_{1} + \dim_{\mathbb{R}} Im(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

$$1 + ? = 3$$

$$? = 2.$$

Poiché $\dim_{\mathbb{R}} Im(f)=2$ (dalla formula delle dimensioni), $Im(f)\subseteq\mathbb{R}^2$, e $\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2=2$, segue che $Im(f)=\mathbb{R}^2$, dunque f è suriettiva (ma non iniettiva).