Lezioni 20 Aprile

Ricordo: Abbiamo visto che se V è un K s.v. ($K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{C}$ spazio vettoriale) di dimensione n, con una base
$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$
allora posso fissare un isomorfismo
$$C_{\mathcal{B}} : V \to K^n$$
definito come segue
$$C_{\mathcal{B}}(\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}) = (a_1, \dots, a_n)$$

siccome $\mathcal{B}$ è una base di V, gli $a_1, \dots, a_n \in K$ esistono e sono unici, per ogni $v \in V$

Intendo: dato $v \in V$, esistono unici $a_1, \dots, a_n$ tali che $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

Esempio

Sia $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,-1), (2,2)\}$.

Mostrare che $\mathcal{B}$ è una base e calcolare $C_B((1,0))$.

Svolgimento

Mostro che $\mathcal{B}$ è base. Sappiamo che basta mostrare che i due vettori $(1,-1)$, $(2,2)$ sono lin. indipendenti o generatori (perché sono 2 vettori di $\mathbb{R}^2$).

Mostro che $(1,-1)$, $(2,2)$ sono lin. indip.

Questo è facile: non sono multiplo l'uno dell'altro; oppure: se ci fossero due scalari λ e μ tali che

$$\lambda(1,-1) + \mu(2,2) = 0$$

avrei: $\begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ -\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -2\mu \\ 4\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ \lambda = 0. \end{cases}$

Per calcolare

$$C_B((1,0))$$

devo scrivere

$$(1,0) = a(1,-1) + b(2,2) \quad (*)$$

e a quel punto, per come ho definito C_B, ho che

$$\boxed{C_B((1,0)) = (a,b)}$$

Risolvo $(*)$

$$\begin{cases} 1 = a + 2b \\ 0 = -a + 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2b + 2b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b = 1 \Rightarrow b = 1/4 \\ a = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Perciò: $C_B((1,0)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Oss. In generale, se

$$C_B : V \to K^n$$

è come sopra, chiamo $C_B(v)$ la

Coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Cioè:

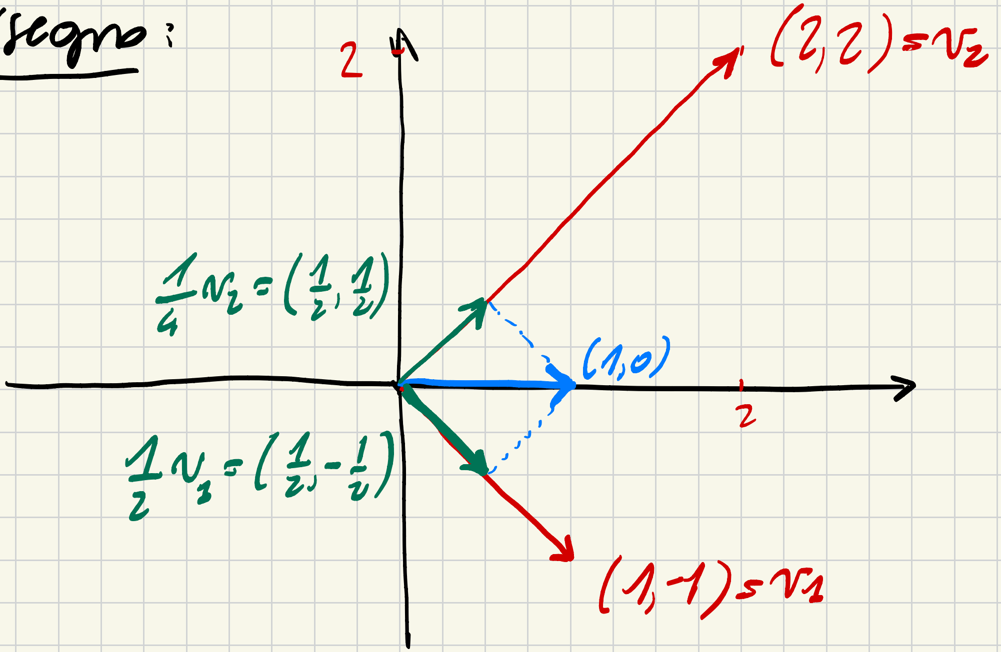
$$C_{\mathcal{B}}(v) = \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}$$

coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Cioè: se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$.

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

Disegno:



Esercizio Si consideri l'insieme

$$\mathcal{B} = \{(2,1,0), (3,1,0), (0,1,2)\} \text{ di } \mathbb{R}^3.$$

(a) Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Si trovino le coordinate di $v = (5,-1,2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(3) Si trovi $C_{\mathcal{B}}((x,y,z))$.

Svolgimento

(a) Poiché abbiamo 3 vettori in uno s.v. di dimensione 3, basta vedere che sono linearmente indipendenti.

Suppongo che

$$\alpha(2,1,0) + \beta(3,1,0) + \gamma(0,1,2) = (0,0,0).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=0 & \Rightarrow 2\alpha-3\alpha=0 \\ \alpha+\beta+\gamma=0 \Longrightarrow \beta=-\alpha \\ \gamma=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \quad \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \text{LIN. INDIP.}$$

Oppure, studio il rango della matrice che ottengo mettendo i vettori in colonna o in riga: li metto in riga e ottengo la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rango 3!

(sottratto dalla prima riga la seconda)

Stessa cosa (esercizio) se i vettori anziché metterli in riga si mettono in colonna.

(b) Trovo le coordinate di $(5,-1,2)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Devo risolvere il sistema

$$\alpha(2,1,0)+\beta(3,1,0)+\gamma(0,1,2)=(5,-1,2)$$

Cioè:

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=5 \\ \alpha+\beta+\gamma=-1 & \Rightarrow \alpha+\beta=-2 \Rightarrow \beta=-2-\alpha \\ 2\gamma=2 \Rightarrow \gamma=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha+3(-2-\alpha)=5 \Rightarrow 2\alpha-6-3\alpha=5 \\ \beta=-2-\alpha \\ \gamma=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\alpha=11 \Rightarrow \alpha=-11 \\ \beta=-2-(-11)=9 \\ \gamma=1 \end{cases}$$

Quindi le coordinate sono $(-11,9,1)$.

(ii) $C_{\mathcal{B}}(5,-1,2)=(-11,9,1)$.

(3) Trovo $C_{\mathcal{B}}((x,y,z))$.

Esattamente come in (2), devo risolvere il sistema

$$\alpha(2,1,0)+\beta(3,1,0)+\gamma(0,1,2)=(x,y,z)$$

Ottengo il sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta=x \\ \alpha+\beta+\gamma=y \\ 2\gamma=z \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z \end{array}\right)$$

Studio il sistema utilizzando la matrice.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z \end{array}\right) \underset{R_1 \to \frac{1}{2}R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & x/2 \\ 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & z \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2-R_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & x/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & y-x/2 \\ 0 & 0 & 2 & z \end{array}\right) \underset{R_2 \to (-2)R_2}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & x/2 \\ 0 & 1 & -2 & -2y+x \\ 0 & 0 & 2 & z \end{array}\right) \underset{R_3 \to \frac{1}{2} R_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 0 & x/2 \\ 0 & 1 & -2 & -2y+x \\ 0 & 0 & 1 & z/2 \end{array}\right)$$

Il sistema diventa (cioè, è equivalente a, cioè ha le stesse soluzioni di)

$$\begin{cases} \alpha + \frac{3}{2}\beta = x/2 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}\beta + \frac{x}{2} \\ \beta - 2\gamma = -2y + x \Rightarrow \beta = 2\gamma - 2y + x \\ \gamma = z/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2}(x - 2y + z) + \frac{x}{2} = -x + 3y - \frac{3}{2} z \\ \beta = z - 2y + x = x - 2y + z \\ \gamma = z/2 \end{cases}$$

Riscrivendo:

$$\begin{cases} \alpha = -x + 3y - \frac{3}{2} z \\ \beta = x - 2y + z \\ \gamma = \frac{z}{2} \end{cases}$$

Perciò

$$C_{\mathcal{B}}((x, y, z)) = \left(-x + 3y - \frac{3}{2} z, x - 2y + z, \frac{z}{2}\right).$$

— o —

__Def.__ Sia $f : V \to W$ una funzione lineare tra due K-s.v. V e W.

Definiamo

(1) $N(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

è detto nucleo di f

(2) $Im(f) = \{ w \in W \mid \text{esiste } v \in V \text{ con } f(v) = w \}$

è detto immagine di f.

Proposizione Sia $f: V \to W$ funzione lineare.
Allora
(1) $N(f)$ è un sottospazio di V
(2) $Im(f)$ è un sottospazio di W.
(3) f è suriettiva se e solo se $Im(f) = W$.
(4) f è iniettiva se e solo se $N(f) = \{0_V\}$.

Dim.
(1) Per verificare che $N(f)$ è un sottospazio di V, basta mostrare che se fisso due vettori v e w in $N(f)$ e due scalari α e β, allora

$$\alpha v + \beta w \in N(f).$$

Basta per questo mostrare che

$$\boxed{f(\alpha v + \beta w) = 0}$$

Sappiamo che

$$f(v) = 0 \quad (\text{perché } v \in N(f))$$
$$f(w) = 0 \quad (\text{perché } w \in N(f)).$$

Ma $f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v) + f(\beta w)$

Perchè f è lineare!

$$= \alpha f(v) + \beta f(w)$$

$$= \alpha \cdot 0_W + \beta \cdot 0_W$$

$$= 0 + 0 = 0.$$

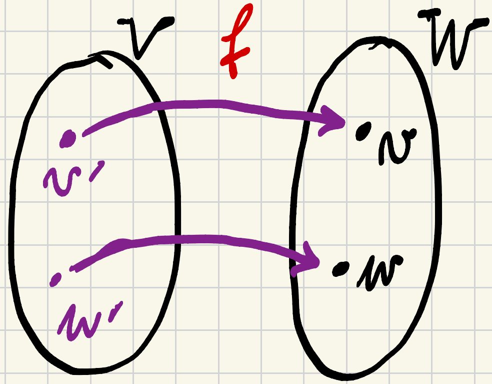
quindi $f(\alpha v + \beta w) = 0$ perciò $\alpha v + \beta w \in N(f)$.

(2) $Im(f)$ è sottospazio: devo verificare che se $v \in Im(f)$ e $w \in Im(f)$, allora per ogni scelta di scalari α e β anche

$$\alpha v + \beta w \in Im(f).$$

So che $v \in Im(f)$, $w \in Im(f)$ dunque esistono v' e w' in V tali che

$$f(v') = v$$
$$f(w') = w$$



$$\boxed{\text{Considero l'unico candidato ragionevolmente buono: } \alpha v' + \beta w',}$$

e allora ho

$$f(\alpha v' + \beta w') = f(\alpha v') + f(\beta w') = \alpha f(v') + \beta f(w') = \alpha v + \beta w.$$

f è lineare

Quindi, $f(\alpha v' + \beta w') = \alpha v + \beta w$, perciò $\alpha v + \beta w \in Im(f)$.

(3) Devo mostrare che f è suriettiva se e solo se $Im(f) = W$. Questa è semplicemente la definizione dei vari pezzi:

f è suriettiva se e solo se, per definizione, per ogni $w \in W$ esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$.

D'altra parte, $\mathrm{Im}(f)$ è l'insieme di tutti i vettori $w \in W$ per i quali esiste un $v \in V$ con $f(v) = w$.
Quindi, $\mathrm{Im}(f) \subseteq W$ in generale, e $\mathrm{Im}(f) = W$ se e solo se f è suriettiva.

(4) Mostro che f iniettiva se e solo se
$N(f) = \{0\} = \{0_V\}$.
Mostro ora che se f è iniettiva, allora $N(f) = \{0_V\}$.
Per prima cosa, noto che $N(f) \supseteq \{0\}$.
Infatti, sappiamo già (verificato in una lezione precedente) che

$$f(0_V) = 0_W \quad (f(0) = 0).$$

per ogni funzione lineare.

D'altra parte, f è iniettiva, quindi se $v \neq 0$, allora $f(v) \neq f(0) = 0$.
(f iniettiva $\Longleftrightarrow$ vettori distinti hanno

immagini distinte).

Dunque, $N(f) = \{0_V\}$.

$$\begin{array}{c} N(f) \\ \| \\ \{v \in V \mid f(v) = 0\} \end{array}$$