April 22, 2026

ESERCIZI PER IL CORSO DI MATEMATICA
CHIMICA-CHIMICA INDUSTRIALE-SCIENZA DEI MATERIALI

Exercizio 1. Dire se le seguenti funzioni sono lineari, e in questo caso dire se sono isomorfismi.

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a, b, c) = (2ab, c)$.
(2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(a, b, c) = (a - b, c)$.
(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (2x - y, x - z, x + z)$.

Exercizio 2. Sia $V = \{a + bX + cX^2 + dX^3 | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ il sottoinsieme dell'insieme dei polinomi in una variabile X a coefficienti in $\mathbb{R}$. Definiamo una somma di due elementi di V tramite la formula

$$(a_1 + b_1X + c_1X^2 + d_1X^3) + (a_2 + b_2X + c_2X^2 + d_2X^3) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)X + (c_1 + c_2)X^2 + (d_1 + d_2)X^3.$$

Definiamo inoltre un prodotto di uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ per un elemento $v = a + bX + cX^2 + dX^3$ tramite la formula

$$\lambda v = (\lambda a) + (\lambda b)X + (\lambda c)X^2 + (\lambda d)X^3.$$

Mostrare che V con le due operazioni descritte sopra è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che la funzione $f : V \to \mathbb{R}^4$ che manda un vettore $v = a + bX + cX^2 + dX^3$ di V nel vettore (a, b, c, d) di $\mathbb{R}^4$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-spazi vettoriali.