Lezione 8 Aprile

Riprendiamo il lemma dell'ultima lezione, dimostrando che vale il seguente fatto

(a) Se $V \xrightarrow{f} W$ è lineare, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V e f è un isomorfismo, allora $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ è una base di W.

Dobbiamo mostrare che $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono generatori linearmente indipendenti.

Mostro che sono linearmente indipendenti.

Suppongo che esistono scalari $a_1, \dots, a_n$ di K ($= \mathbb{R}, \mathbb{C}$) tali che

$$a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0 \; (= 0_W)$$

Siccome f è lineare,

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0.$$

Siccome f è iniettiva, l'insieme dei

vettori di V che hanno immagine 0_W è $\{0_V\}$, quindi

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0.$$

Siccome $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base, è anche un insieme di vettori linearmente indipendenti, dunque

$$a_1 = 0, \ldots, a_n = 0.$$

Poiché siamo partiti dall'equazione

$$a_1 f(v_1) + \ldots + a_n f(v_n) = 0$$

e abbiamo concluso che

$$a_1 = \ldots = a_n = 0$$

linearmente indipendenti.

allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ sono l.i.

Dimostro ora che $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ sono generatori di W. Devo quindi mostrare che ogni $w \in W$ si scrive come combinazione lineare di vettori $f(v_1), \ldots, f(v_n)$, cioè che esistono $a_1, \ldots, a_n$ scalari di K tali che

$$w = a_1 f(v_1) + \ldots + a_n f(v_n).$$

Poiché f è suriettiva, so che esiste $v \in V$ tale che

$$f(v) = w.$$

Poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, in particolare è un sistema di generatori, dunque esistono $a_1, \dots, a_n$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Applico f ed ottengo:

$$f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n).$$

Ma f è lineare, dunque

$$w = f(v) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n).$$

Quindi $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sono generatori. ∎

<u>Oss</u> Abbiamo mostrato che se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, $f: V \to W$ isomorfismo, allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ base di W.

Dunque: se V e W sono isomorfi,

allora

$$\dim_K(V) = \dim_K(W).$$

<u>Teorema</u> Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione n. Allora V è isomorfo a K^n.

<u>Dim.</u> Fisso una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V. Voglio definire un isomorfismo tra V e K^n utilizzando questa base.

<u>Passo 1</u>: Ricordo che ogni elemento di V si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base, quindi, dato $v \in V$, esistono e sono unici $a_1, \dots, a_n \in K$ tali che

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

(si dimostra così: poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono generatori, gli $a_1, \dots, a_n$ esistono; se

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$$

allora

$$(a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_n - b_n) v_n = 0$$

e poiché $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono l.i., segue

$$a_1 - b_1 = 0, \dots, a_n - b_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$$

quindi gli $a_1, \dots, a_n$ sono anche unici).

<u>Passo 2</u> Definisco la funzione

$$\boxed{\begin{aligned} f : V &\longrightarrow K^n \\ v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n &\longmapsto (a_1, \dots, a_n). \end{aligned}}$$

Mostro che è un isomorfismo, cioè: lineare, iniettiva, suriettiva.

<u>Lineare</u>: Devo mostrare che (a) $f(v+w) = f(v) + f(w)$

Def. di funzione lineare $\longrightarrow$ (b) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

Mostro che vale la (a). Fisso v e $w \in V$, e li scrivo come

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \, ; \quad \boxed{w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n}$$

Perciò

$$v+w=(a_1v_1+\dots+a_nv_n)+(b_1v_1+\dots+b_nv_n)$$
$$\overset{!}{=}(a_1+b_1)v_1+\dots+(a_n+b_n)v_n.$$

Calcolo $f(v)$, $f(w)$, $f(v+w)$:

$$f(v)=(a_1,\dots,a_n)$$
$$f(w)=(b_1,\dots,b_n)$$
$$f(v+w)=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$$

Ma $(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)=(a_1,\dots,a_n)+(b_1,\dots,b_n)$ quindi $f(v+w)=f(v)+f(w)$.

Mostro ora che vale la (b); fisso $v\in V$ e $\lambda\in K$. Scrivo

$$v=a_1v_1+\dots+a_nv_n.$$

Allora

$$\lambda v=(\lambda a_1)v_1+\dots+(\lambda a_n)v_n.$$

perciò

$$f(v)=(a_1,\dots,a_n)\ ;\ f(\lambda v)=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n).$$

Però, poiché

$$(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n) = \lambda (a_1, \ldots, a_n)$$

Concludo che $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.
Quindi, f è lineare.

<u>Iniettiva</u>: Se $f(v) = f(w)$, diciamo

$$f(v) = f(w) = (a_1, \ldots, a_n)$$

allora, per come è definita f, deve essere

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$
$$w = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$$

perciò $v = w$. (detto in altro modo: ogni vettore $v \in V$ si scrive <u>in modo unico</u> come $v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, quindi i $(a_1, \ldots, a_n)$ sono univocamente determinati da v).

<u>Suriettiva</u>: Ovvio:

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$$

quindi ogni vettore di K^n è immagine di un vettore di V.

Segue la conclusione:

$$\boxed{\begin{aligned} V &\longrightarrow K^n \\ v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n &\longmapsto (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}}$$

è isomorfismo di K s.v. //